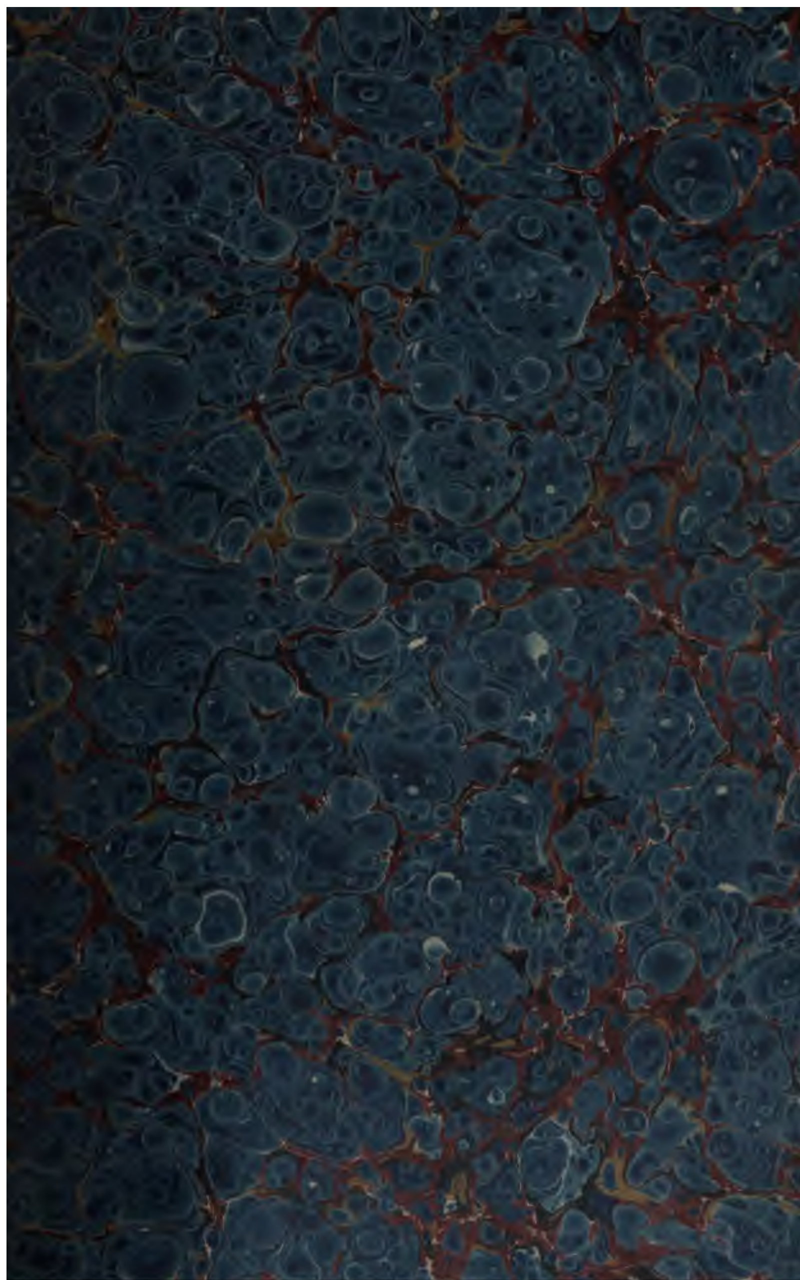

1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



ENCYCLOPÉDIE SCIENTIFIQUE

PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION

du Dr TOULOUSE, Directeur du Laboratoire de l'Ecole des Hautes-Études

Secrétaire général : H. PIÉRON, Agrégé de l'Université.

BIBLIOTHÈQUE DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE ET GÉNIE

Directeur : M. D'OCAGNE

Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur à l'Ecole des Ponts et Chaussées, Répétiteur à l'Ecole Polytechnique.

BALISTIQUE EXTÉRIEURE
RATIONNELLE
(PROBLÈME BALISTIQUE PRINCIPAL)

BALISTIQUE EXTÉRIEURE RATIONNELLE

(PROBLÈME BALISTIQUE PRINCIPAL)

PAR

Le Commandant P. CHARBONNIER
CHEF D'ESCADRON D'ARTILLERIE COLONIALE



Avec 76 figures dans le texte.

PARIS
OCTAVE DOIN, ÉDITEUR
8, PLACE DE L'ODÉON, 8

1907

BALISTIQUE EXTÉRIEURE
RATIONNELLE

(PROBLÈME BALISTIQUE PRINCIPAL)

INTRODUCTION

§ 1. — La balistique extérieure rationnelle

1. **Objet de la Balistique Extérieure.** — L'étude du mouvement d'un corps pesant de forme quelconque dans un milieu résistant est un problème inabordable dans l'état actuel de la Physique, de la Mécanique et de l'Analyse.

La *Balistique Extérieure* étudie seulement le mouvement dans l'air de corps solides — les projectiles de l'artillerie — qui jouissent, au point de vue mécanique, de propriétés spéciales, grâce auxquelles le problème balistique devient notablement plus simple et plus accessible au calcul.

Les simplifications qu'on apporte au problème général constituent les hypothèses qui permettent de ramener l'étude d'un phénomène naturel très complexe à une question de Mécanique pure et de constituer, sur des bases logiques, la *Balistique Extérieure rationnelle*.

Cette science met en présence quatre choses : la *Terre*, la *Gravité*, l'*Atmosphère* et le *Projectile*. Les hypothèses nécessaires au développement de la Balistique se rapportent à chacune de ces quatre choses.

2. **La Terre.** — On suppose d'abord dans l'étude du mouvement des projectiles sur les trajectoires usuelles, limitées dans les deux sens à la surface de la terre, que celle-ci est *plane* et *immobile*.

La première hypothèse relativement à la forme *plane* de la terre peut être admise parce que l'étendue des trajectoires actuelles (20 km. au maximum) est extrêmement petite relativement au rayon du globe terrestre (6 371 km.). L'erreur produite sur la portée par cette très faible courbure ne peut qu'être très petite relativement à la portée elle-même ; on est conduit à la négliger, en première approximation tout au moins, quitte à donner le moyen de l'évaluer en deuxième approximation.

L'*immobilité* de la terre est une hypothèse du même ordre. La rotation de la terre influe sur les trajectoires des projectiles ; mais cette influence, quand on la traduit en nombres, en faisant intervenir la vitesse réelle de rotation de la terre et la petitesse de nos trajectoires, est extrêmement minime.

On pourra donc encore admettre, tout d'abord, l'hypothèse de l'immobilité de la terre, quitte à donner plus tard, dans une deuxième approximation, le moyen d'évaluer l'erreur ainsi consentie.

3. **La gravité.** — Dans l'étude du mouvement des projectiles, on suppose d'abord que la gravité est une force constante en *grandeur* et en *direction*.

On sait que ces deux hypothèses ne s'appliquent légitimement qu'à une petite étendue autour d'un point du globe, mais qu'en réalité, la gravité varie suivant l'altitude et que sa direction passe à peu près par le centre de la terre. Elle varie aussi avec la latitude du lieu où se fait le tir.

La petitesse de nos trajectoires actuelles relativement aux dimensions du globe autorise à admettre en première approximation, la constance de la gravité, en *grandeur* et en *direction*.

Une seconde approximation permettra d'évaluer l'importance de l'erreur introduite par ces hypothèses.

4. **L'Atmosphère.** — Le cas le plus simple consiste évidemment à supposer que l'air où se meut le projectile est *homogène* et *immobile*.

Mais en réalité la *densité* de l'air et la *résistance* qui en est une fonction, varient avec l'altitude. Or, à cause du peu d'étendue en hauteur de la plupart des trajectoires utilisées par l'artillerie, la variation en densité est faible de l'origine au sommet. Il en résulte qu'en première approximation, l'hypothèse de la densité constante devra être admise et qu'on pourra calculer, comme deuxième approximation, le terme correctif, en général petit, dû à la variation de la densité de l'air avec l'altitude.

L'hypothèse de l'immobilité de l'atmosphère ne présente pas le même caractère que les précédentes, car le *vent atmosphérique* doit être considéré comme un phénomène accidentel. Ses effets d'ailleurs seront en général très faibles relativement aux dimensions de la trajectoire en air calme, à cause de la petitesse de la vitesse ordinaire du vent relativement à la vitesse dont est animé le boulet. Il en résulte que l'effet du vent pourra être calculé comme une seconde

approximation, tandis que le problème ordinaire supposera l'air calme.

5. **Le Projectile.** — Un projectile qui se meut dans un milieu résistant est sollicité par deux espèces de forces : par la *pesanteur* qui agit sur toutes ses particules et par la *résistance* qui s'exerce sur tous les points de sa surface.

En vertu d'un théorème connu « que le centre de gravité d'un corps solide se meut de la même manière que si toute la masse y était concentrée et que toutes les forces extérieures y fussent transportées parallèlement à elles-mêmes », le mouvement de translation du projectile est le même que celui d'un point matériel de masse égale auquel serait appliquée la résultante à chaque instant de la *pesanteur* et de la *résistance*.

Si on considère des *projectiles sphériques* dont le centre de gravité coïncide avec le centre de figure, ou des *projectiles oblongs* assujettis à se mouvoir dans le sens même de leur axe, la résistance de l'air se réduit, par une raison évidente de symétrie, à une force unique dirigée en sens inverse du mouvement de translation. L'expérience montre que, dans ce cas, la résistance ne dépend, pour une valeur donnée de la densité du milieu, que de la vitesse de translation.

On dit alors que la résistance est *tangentielle*.

Dans le cas général du mouvement d'un mobile de forme quelconque lancé arbitrairement dans l'air, la résistance varie à chaque instant, d'abord avec la vitesse du mobile, puis avec la façon dont il présente sa surface à l'air. La résistance est donc fonction (en grandeur et direction) de la position même du mobile sur sa trajectoire et de la vitesse ; elle n'est plus tangentielle.

Les *projectiles oblongs* lancés par les canons de l'artillerie

moderne, prennent sous l'action des rayures, un mouvement rapide de rotation autour de leur axe. Dans ces conditions, nécessaires pour assurer la stabilité du projectile sur sa trajectoire, l'hypothèse d'une résistance tangentielle, n'est pas absolument exacte. L'axe de figure n'est pas l'axe de rotation et ni l'un ni l'autre ne peuvent rester rigoureusement dirigés suivant la tangente à la trajectoire.

La résistance de l'air ne se réduit donc pas à une force unique, mais à une force et à un couple ; elle ne peut être rigoureusement tangentielle.

Le phénomène de la *dérivation* des projectiles oblongs résulte justement de la non-coïncidence de l'axe de figure et de la tangente à la trajectoire. Or, l'expérience montre que la dérivation n'éloigne le point de chute du plan de projection que d'une quantité qui est toujours très faible par rapport à la portée ; d'autre part, l'étude théorique du phénomène, d'accord avec l'expérience, indique que dans le cas d'un projectile animé d'une grande vitesse de rotation, l'écart entre l'axe de figure et la tangente reste, en général, très petit.

La force déviatrice qui est appliquée au projectile et qui produit la dérivation est donc toujours très faible par rapport à la force principale qui est la résistance tangentielle. On peut donc négliger cette force déviatrice, en première approximation tout au moins, et considérer indépendamment l'un de l'autre le *mouvement principal* dû à la seule résistance tangentielle et le *mouvement perturbateur* dû à la force déviatrice.

6. Problème balistique principal. — Les considérations qui viennent d'être développées conduisent à une simplification très grande dans l'étude de la Balistique

Extérieure rationnelle. Elles autorisent, en effet, la division du problème en deux parties de caractères différents : l'étude du *mouvement principal* dû à l'action simultanée de deux forces importantes et l'étude des *perturbations* dues à un grand nombre de causes de faible action.

Le problème *balistique principal* s'énoncera alors ainsi : *Etudier le mouvement d'un point matériel pesant, dans un milieu en repos, de densité constante, qui lui oppose une résistance tangentielle, fonction de la vitesse. — La terre est supposée plane et immobile ; la gravité est constante en grandeur et en direction.*

7. **Problèmes balistiques secondaires.** — Le mouvement du projectile étant supposé connu par la solution du problème balistique principal, il y aura lieu d'étudier les modifications que les hypothèses simplificatives qui ont été faites apportent à la trajectoire véritable.

Les termes correctifs qui s'introduiront ainsi seront en général très petits ; d'après un principe connu, on pourra les calculer séparément et leur somme donnera la correction totale à apporter à la trajectoire principale.

En les rangeant suivant les causes qui leur donnent naissance, les *Problèmes balistiques secondaires* seront les suivants :

I. *La Terre.*	1° Sphéricité. 2° Rotation.
II. *La Gravité*	3° Variation avec l'altitude. 4° Variation avec la latitude. 5° Convergence des verticales.
III. *L'Atmosphère*	6° Variation de la densité avec l'altitude. 7° Vent atmosphérique.
IV. *Le Projectile.*	8° Dérivation.

8. **Objet du présent volume.** — On traitera exclusivement ici du *problème balistique principal*. Mais avant d'en aborder la solution, il est nécessaire de donner quelques indications sommaires sur les lois de la résistance de l'air. Cette résistance est en effet la seule force inconnue qui figure dans l'énoncé du problème balistique principal (6).

§ 2. — Lois de la résistance de l'air

9. **Lois expérimentales.** — L'étude théorique des lois de la résistance de l'air est extrêmement peu avancée et la partie de la physique mathématique qui s'en occupe est encore loin de pouvoir rendre compte des faits expérimentaux. L'étude expérimentale de ces lois a été poussée très loin par les artilleurs, car la valeur numérique de la résistance de l'air est nécessaire pour le calcul des trajectoires et l'application des formules de la Balistique rationnelle. Mais, il appartient aux traités de Balistique Expérimentale de donner tous les détails nécessaires sur les procédés pratiques utilisés pour la détermination des lois de la résistance de l'air, et de discuter les nombres ainsi trouvés par l'expérience.

Pour aborder et traiter complètement la *Balistique rationnelle*, il importe seulement de connaître les trois lois que l'expérience a mises en évidence :

1re loi. — La résistance de l'air est proportionnelle à la densité de l'air.

2e loi. — La résistance de l'air est proportionnelle à la section droite du projectile.

3e loi. — La résistance de l'air pour des projectiles de même section et de formes peu différentes peut être

mise sous la forme i F(v) *où* i *est un coefficient indépendant de la vitesse et* F(v) *une même fonction de la vitesse pour tous ces projectiles.*

10. **Expression des lois de la résistance.** — La *résistance*, c'est-à-dire la force R en kilogrammes qui s'oppose au mouvement du projectile, s'écrira d'après les trois lois précédentes :

$$R = \Delta \frac{\pi a^2}{4} i \, F(v)$$

où Δ est le poids du mètre cube d'air en kilogrammes, nombre proportionnel à la densité de l'air.

a le diamètre du projectile en mètres.

i *l'indice caractéristique* du projectile.

L'*accélération* I de la résistance de l'air $I = \frac{R}{m} = R \frac{g}{p}$ (p étant le poids du projectile en kilogrammes et g l'accélération de la pesanteur) s'écrit

$$I = g \frac{\pi}{4} i \, \Delta \frac{a^2}{p} F(v)$$

ou bien, en supposant que le facteur numérique $g \frac{\pi}{4}$ entre dans F(v), $\quad I = cF(v)$

en posant $\quad c = i \, \Delta \frac{a^2}{p}$.

Le nombre c est le *coefficient balistique* du projectile ; cF(v) ou souvent, par abréviation, cF, est une accélération immédiatement comparable à g. Le nombre F est également une accélération, celle du projectile dont le coefficient balistique est égal à l'unité.

La résistance R en kilogrammes, qui pourra se comparer au poids du projectile, est $R = \frac{p}{g} cF(v)$.

11. **Fonction** $f(v)$. — La fonction $F(v)$ augmentant

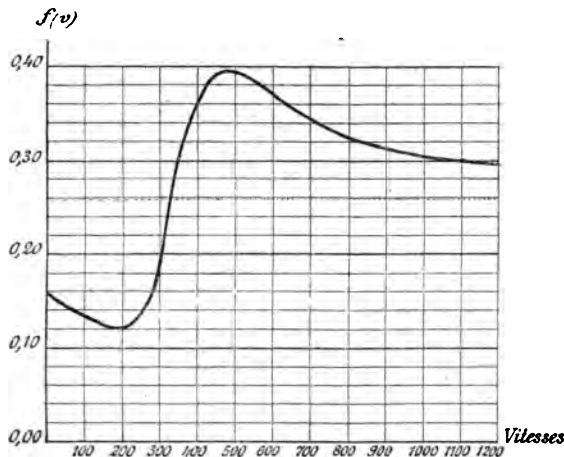


Fig. 1.

très vite avec v, sa représentation graphique n'est pas commode et on saisit mal les lois de sa variation. Aussi compare-t-on souvent la fonction $F(v)$ à des fonctions monômes v, v^2, v^3, ou v^4.

En général, on considère la fonction $f(v)$ telle que $f(v) = \frac{F(v)}{v^2}$.

Les expériences entreprises au polygone de Gâvre, poursuivies pendant de très nombreuses années et utilisant plu-

sieurs milliers de coups de canon, ont permis de déterminer la forme de la courbe $f(v)$ pour les projectiles ogivaux de la marine. Elle est figurée ci-dessus.

Cette courbe présente une certaine symétrie par rapport au point qui correspond à une vitesse de 335 mètres (approximativement la vitesse du son dans l'air). Ce point paraît être le centre de la courbe qui admettrait une asymptote horizontale passant par ce point. Un maximum et un minimum symétriques ont lieu pour des vitesses de $335 + 140 = 475$ mètres environ et $335 - 140 = 195$ mètres environ.

12. Rôle de la loi de résistance dans la solution du problème balistique. — En considérant la forme de la courbe des $f(v)$, on peut se rendre compte des interprétations successives qui, à mesure que les vitesses initiales des canons augmentaient, ont dû être données de la loi de résistance de l'air, de la progression des essais tentés pour résoudre le problème balistique en spécifiant la forme de la fonction $F(v)$, des raisons de leur succès momentané et des causes de leur insuffisance finale.

Il s'agissait de trouver, pour la fonction $F(v)$, une forme simple, susceptible de permettre la résolution analytique du problème balistique, tout en ne s'écartant pas trop de la loi de résistance véritable.

1° Tant qu'il ne s'est agi que des vitesses très faibles que, dans l'ancienne artillerie, on imprimait aux bombes, vitesses variant entre 75 mètres et 250 mètres environ, la loi du carré, d'ailleurs regardée comme démontrée théoriquement d'après les travaux de Newton, a pu paraître bien suffisamment exacte. C'est sur cette loi qu'*Euler* a basé la pre-

mière théorie balistique. On n'avait encore aucune mesure de la résistance de l'air ; mais la courbe des $f(v)$ présentant, dans les régions des vitesses utilisées, un minimum, la loi quadratique restait la plus satisfaisante.

2° Pour les vitesses plus grandes qu'on fut bientôt amené à considérer, et qui s'étendaient jusque vers 350 mètres le général *Didion*, mettant à profit les premières déterminations de la résistance de l'air, au moyen du pendule balistique, remarquait une augmentation plus rapide de la résistance en fonction de la vitesse que celle qu'indiquait la loi quadratique.

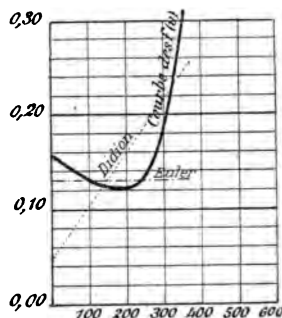


Fig. 2.

A la courbe des $f(v)$, dans la région qui s'étend de 100 mètres environ à 340 mètres, Didion substitua une droite inclinée sur l'axe des v, en posant $f(v) = a + bv$.

3° Mais cette loi elle-même ne parut bientôt plus suffisante quand les canons atteignirent des vitesses de 400 mètres et 500 mètres. La droite de Didion ne compensait que sur une étendue insuffisante la courbe des $f(v)$ dont on obtenait des points de plus en plus nombreux par l'emploi généralisé des chronographes électriques.

Bashforth releva la droite de Didion qu'il fit passer par l'origine, adoptant ainsi la loi cubique $F(v) = B_3 v^3$.

4° Mais parmi toutes les hypothèses simples, susceptibles de représenter la courbe des $f(v)$ avec quelque précision et

de faciliter en même temps la solution du problème balistique, la plus remarquable est, sans contredit, celle de Piton-Bressant qui remplace la courbe des $f(v)$ dont l'ascension est si rapide entre 250 mètres et 500 mètres, par une parabole du second degré à axe vertical ayant son sommet à l'origine. Cette représentation revient à adopter la loi biquadratique $F(v) = B_4 v^4$.

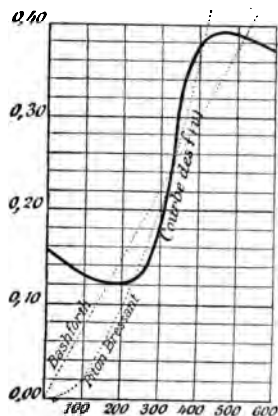


Fig. 3.

Par une heureuse fortune, il arrive que la loi biquadratique portée dans les équations différentielles du mouvement permet de les intégrer à l'aide de quelques approximations sous une forme qui présente le maximum de simplicité.

5° Mais l'application de cette loi au delà de 500 mètres cesse d'être logique : elle perd alors toute signification et a dû être abandonnée en pratique.

13. **Base réelle du problème balistique.** — Cette façon d'envisager la solution du problème balistique en s'imposant la représentation sous une forme simple d'une loi très compliquée, ne peut évidemment conduire à une théorie présentant quelque généralité. En décomposant ainsi en tranches la loi de résistance de l'air, en substituant à la courbe des $f(v)$ tantôt une droite, tantôt une parabole, voire une hyperbole $\left[F(v) = a - bv \text{ d'où } f(v) = \frac{a - bv}{v^2}\right]$ qui est peut-être la courbe simple représentant le mieux,

sur une grande étendue et pour les grandes vitesses, la fonction $f(v)$, on n'obtiendra évidemment que des formules partielles ne s'appliquant qu'entre des limites déterminées.

Il n'y aura aucune unité de méthode ni de formules dans ces solutions particulières, et l'application en sera même des plus difficiles dans la pratique où les tirs qu'on veut étudier sortiront souvent des limites que l'on a tracées d'avance à l'emploi de la théorie.

Si ces modes de représentation ont eu leur utilité à leur heure, la manière dont on envisage actuellement la solution du problème balistique paraît leur avoir fait perdre une grande partie de leur intérêt.

Les équations différentielles du mouvement du projectile s'établissent évidemment en laissant à la résistance la forme générale et implicite $F(v)$. La solution vraiment rationnelle et générale du problème balistique qui consiste dans l'intégration de ces équations différentielles, devrait conserver cette indétermination de la fonction $F(v)$ jusque dans les formules d'application.

Le problème devrait être résolu en lui-même, par des procédés généraux et non à l'aide des artifices analytiques que peut permettre le choix d'une forme explicite de la fonction $F(v)$.

La solution devrait pouvoir s'appliquer identiquement, non seulement à la loi particulière de résistance qui concerne les projectiles en usage à une certaine époque, mais à une fonction quelconque exprimant la résistance. On aurait alors une solution générale du problème mécanique posé, solution dans laquelle il suffirait d'introduire pour les applications numériques, comme cas particulier, pour ainsi dire, telle loi de résistance de l'air qu'on voudra.

On peut dire que cette manière d'envisager d'ensemble le problème balistique, jointe à la solution approchée qui a pu être donnée dans certains cas spéciaux constitue un des progrès les plus considérables qui aient été faits en Balistique Extérieure. Le mérite en revient pour la plus grande partie à deux savants artilleurs italiens, le colonel de Saint-Robert et le colonel Siacci.

A l'heure actuelle, il est possible d'élargir la même idée de manière à lui faire embrasser la Balistique Extérieure rationnelle tout entière.

Il n'est pas inutile cependant d'étudier et de traiter les problèmes particuliers définis pas une loi simple de résistance. Outre leur application encore possible à des cas bien déterminés, ils ont une importance historique considérable; leur connaissance est nécessaire pour lire les travaux des balisticiens et pour comprendre les rapports des commissions d'expérience ; enfin certaines questions, inabordables par une théorie générale, admettent dans des cas particuliers une solution complète qui peut déjà donner des résultats approchés, d'une application assez étendue et d'une généralisation possible.

§ 3. — Divisions de l'ouvrage

14. **Les deux premiers livres.** — Une division logique d'une science est bien souvent le critérium le plus sûr de son degré d'avancement ; aussi est-il en général impossible d'établir à priori une division dont la base suppose forcément la connaissance même de la science presque entière. Les parties naturelles de la Balistique Extérieure rationnelle s'établissent, comme on le verra, par

la discussion d'une certaine équation différentielle (105).

On ne peut donc donner ici que la division de la partie de l'ouvrage qui conduira le lecteur jusqu'à cette première étape.

Le problème balistique principal met, en un point de la trajectoire, en présence deux forces la *gravité* g, l'*accélération de la résistance de l'air* $cF(v)$ et une direction *l'inclinaison* τ *de la tangente à la trajectoire;* la considération de ces trois éléments suffit évidemment pour établir les équations différentielles du mouvement. Or le problème balistique se simplifiera notablement quand l'influence de l'un ou de l'autre de ces éléments disparaîtra.

Le **livre I** de l'ouvrage sera donc consacré à l'étude des *Cas limites du problème balistique* qui seront évidemment au nombre de quatre :

$cF(v) = 0$. *Mouvement dans le vide.*

$g = 0$. *Mouvement rectiligne dans l'air.*

$\tau = \frac{\pi}{2}$. *Mouvement ascendant d'un point pesant dans un milieu résistant.*

$\tau = -\frac{\pi}{2}$ *Mouvement descendant d'un point pesant dans un milieu résistant.*

Le **livre II** : *Les propriétés générales des trajectoires atmosphériques*, traitera de toutes les questions que l'on peut aborder par la seule discussion des équations différentielles du mouvement. Il se terminera par la classification des cas où on peut intégrer ces équations différentielles, ce qui constituera la division de la seconde partie de l'ouvrage. Celle-ci sera consacrée à l'étude détaillée des différents problèmes ainsi définis.

LIVRE PREMIER

LES CAS LIMITES DU PROBLÈME BALISTIQUE

CHAPITRE PREMIER

MOUVEMENT DES PROJECTILES DANS LE VIDE

§ I. — ÉQUATIONS DU MOUVEMENT DANS LE VIDE

15. **Équations différentielles du second ordre**. — Dans le vide, une seule force agit sur le projectile, le *poids* qui est appliqué au centre de gravité. Le problème balistique principal suppose cette force constante en *grandeur* et en *direction* (3). Le centre de gravité ne sortira donc jamais du plan qui contient, à un instant quelconque, la direction de la pesanteur et celle de la vitesse acquise. La trajectoire est, par suite, une courbe plane contenue dans le plan vertical du premier élément de la trajectoire. Ce plan est le *plan de projection*.

Soit O la bouche de la pièce que nous prendrons comme origine de la trajectoire. Le mouvement du centre de gravité M du projectile sera rapporté à deux axes rectangulaires situés dans le plan de projection, Ox horizontal, Oy vertical.

Soient p le poids du projectile, g la gravité, t le temps compté à partir de l'origine O de la trajectoire.

Puisque la seule force appliquée au centre de gravité agit suivant la verticale, la projection de l'accélération suivant l'axe des x est nulle et suivant l'axe des y, elle est égale à $-g$. On a donc les deux équations du mouvement suivantes :

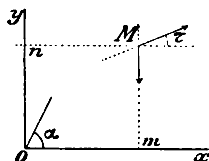


Fig. 4.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -g.$$

Ces équations s'intègrent facilement sous cette forme. Ainsi, une première intégration donne

$$\frac{dx}{dt} = C \qquad \frac{dy}{dt} = -gt + C'.$$

On voit que les deux mouvements suivant les axes des x et des y sont indépendants l'un de l'autre : le premier, suivant l'axe des x est *uniforme* et de vitesse constamment égale à C. Le second, suivant l'axe des y, est *uniformément retardé ;* ce mouvement est celui d'un projectile lancé verticalement avec une vitesse C'.

On a d'ailleurs, en faisant $t = 0$

$$C = V_0 \cos \alpha \qquad C' = V_0 \sin \alpha.$$

V_0 est la *vitesse initiale.*
α est l'*angle de projection.*

16. **Les quatre équations différentielles du premier ordre.** — Afin de rapprocher la forme des

expressions des éléments de la trajectoire dans le vide de celle que l'on adopte en général pour la solution du problème balistique dans l'air, on transformera les deux équations différentielles du second ordre en quatre équations du premier ordre de la manière suivante :

Soient v *la vitesse* du projectile au point M et τ *l'inclinaison* sur l'horizontale de la tangente à la trajectoire au même point.

On a les deux relations

$$\frac{dx}{dt} = v \cos \tau \qquad \frac{dy}{dt} = v \sin \tau.$$

Les deux équations différentielles du second ordre deviennent alors

$$\frac{d(v \cos \tau)}{dt} = 0 \qquad \frac{d(v \sin \tau)}{dt} = -g$$

ou, en développant les numérateurs :

$$\cos \tau \frac{dv}{dt} - v \sin \tau \frac{d\tau}{dt} = 0$$

$$\sin \tau \frac{dv}{dt} + v \cos \tau \frac{d\tau}{dt} = -g.$$

Multipliant la première par $\sin \tau \, dt$, et la seconde par $\cos \tau \, dt$ et retranchant, il viendra :

$$g dt = -\frac{v \, d\tau}{\cos \tau}.$$

Remplaçant alors dt par sa valeur en fonction de

v et τ dans les expressions de dx et de dy et posant $u = v \cos \tau$ on obtiendra le système des quatre équations différentielles suivantes qui sont celles qu'on se proposait d'établir :

$$du = 0 \qquad dx = -\frac{u^2}{g}\frac{d\tau}{\cos^2 \tau}$$

$$dt = -\frac{u}{g}\frac{d\tau}{\cos^2 \tau} \qquad dy = -\frac{u^2}{g}\operatorname{tg} \tau \frac{d\tau}{\cos^2 \tau}.$$

17. **Intégration avec la variable** τ. — La première équation, $du = 0$, donne $u =$ const. Comme, à l'origine, on a $u_0 = V_0 \cos \alpha$, la constante est égale à $V_0 \cos \alpha$, d'où ce théorème : *La vitesse horizontale se conserve constante dans le vide et on a, en chaque point de la trajectoire,* $u = V_0 \cos \alpha$.

Remplaçant alors, dans les trois autres équations différentielles u par u_0 et intégrant, il viendra le système suivant qui résoud le problème du mouvement dans le vide, avec la variable τ :

$$u = u_0 \qquad x = \frac{u_0^2}{g}(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \tau)$$

$$t = \frac{u_0}{g}(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \tau) \qquad y = \frac{1}{2}\frac{u_0^2}{g}(\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \tau)$$

18. **Expression de l'arc** s. — On remarquera, en outre, l'expression de l'arc s de la trajectoire, en fonction de l'inclinaison τ.

On a : $$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = -\frac{u^2}{g}\frac{d\tau}{\cos^3 \tau}$$

et cette équation s'intégrera par la formule :

$$s = \frac{u_0^2}{g} [\xi_2(\alpha) - \xi_2(\tau)]$$

en posant

$$\xi_2(\tau) = \int_0^\tau \frac{d\tau}{\cos^3\tau} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\tau}{\cos^2\tau} + \text{Log tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2}\right)\right]$$

Cette intégrale s'obtient facilement par une intégration par parties, développée ainsi qu'il suit :

$$\xi_2(\tau) = \int_0^\tau \frac{d\tau}{\cos^3\tau} = \int_0^\tau \frac{1}{\cos\tau}\,\frac{d\tau}{\cos^2\tau}$$

$$= \frac{1}{\cos\tau}\,\text{tg}\,\tau - \int_0^\tau \text{tg}\,\tau\,\frac{\sin\tau}{\cos^2\tau}\,d\tau = \frac{\sin\tau}{\cos^2\tau} - \int_0^\tau \frac{\sin^2\tau}{\cos^3\tau}\,d\tau$$

$$= \frac{\sin\tau}{\cos^2\tau} - \int_0^\tau \frac{1-\cos^2\tau}{\cos^3\tau}\,d\tau = \frac{\sin\tau}{\cos^2\tau} - \xi_2(\tau) + \int_0^\tau \frac{d\tau}{\cos\tau}$$

d'où $\qquad \xi_2(\tau) = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\tau}{\cos^2\tau} + \int_0^\tau \frac{d\tau}{\cos\tau}\right]$

Or

$$\int_0^\tau \frac{d\tau}{\cos\tau} = \int_0^\tau \frac{d\tau}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \tau\right)} = \int_0^\tau \frac{d\tau}{2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2}\right)}$$

$$= \int_0^\tau \frac{\dfrac{d\tau}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2}\right)}}{\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2}\right)} = \text{Log tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2}\right)$$

c.q.f.d.

On posera aussi parfois $\quad \xi_0(\tau) = \text{Log tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2}\right).$

19. Changement de variables. Formules des éléments d'un point de la trajectoire. — Dans les formules du n° 17, qui donnent t, x et y en fonction de τ, on peut, par des transformations aisées, prendre, au lieu de τ comme variable indépendante, celle des trois

INCONNUES	VARIABLE τ 1	VARIABLE t 2	VARIABLE x 3
τ	»	$\operatorname{tg}\tau = \operatorname{tg}\alpha - \frac{gt}{u_0}$	$\operatorname{tg}\tau = \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx}{u_0^2}$
t	$t = \frac{u_0}{g}\left(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\tau\right)$	»	$t = \frac{x}{u_0}$
x	$x = \frac{u_0^2}{g}\left(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\tau\right)$	$x = u_0 t$	»
y	$y = \frac{u_0^2}{2g}\left(\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\tau\right)$	$y = u_0 t \operatorname{tg}\alpha - \frac{1}{2} g t^2$	$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2u_0^2}$
v	$v = \frac{u_0}{\cos\tau}$	$v \underset{1}{=} u_0 \sqrt{1 + \left(\operatorname{tg}\alpha - \frac{gt}{u_0}\right)^2}$	$v \underset{1}{=} u_0 \sqrt{1 + \left(\operatorname{tg}\alpha - \right.}$

[1] Le radical doit être pris avec le signe + seulement, car ces radicaux sont l'expressi

variables t, x ou y qu'on voudra. A l'aide de la relation $v \cos\tau = u_0$, on pourra aussi prendre v comme variable.

Le tableau ci-dessus résume l'ensemble des formules qu'on peut ainsi obtenir, pour un point quelconque de la trajectoire, en fonction de l'une ou de l'autre de ces 5 variables naturelles et des données à l'origine (α, V_0).

Remarquons que l'équation $y = \frac{V_0^2 - v^2}{2g}$ résulte directement de l'application du théorème des forces vives et que les deux expressions $v = \frac{u_0}{\cos\tau}$ et $x = u_0 t$ sont la traduc-

VARIABLE y 4	VARIABLE v 5	INCONNUES
$\tau = \pm \frac{1}{u_0}\sqrt{u_0^2 \operatorname{tg}^2\alpha - 2gy}$	$\cos\tau = \frac{u_0}{v}$	τ
$= \frac{1}{g}\left[u_0 \operatorname{tg}\alpha \pm \sqrt{u_0^2 \operatorname{tg}^2\alpha - 2gy}\right]$	$t = \frac{u_0}{g}\left(\operatorname{tg}\alpha \pm \sqrt{\frac{v^2}{u_0^2} - 1}\right)$	t
$= \frac{u_0}{g}\left[u_0 \operatorname{tg}\alpha \pm \sqrt{u_0^2 \operatorname{tg}^2\alpha - 2gy}\right]$	$x = \frac{u_0^2}{g}\left(\operatorname{tg}\alpha \pm \sqrt{\frac{v^2}{u_0^2} - 1}\right)$	x
»	$y = \frac{V_0^2 - v^2}{2g}$	y
$= \sqrt{V_0^2 - 2gy}$	»	v

…s τ pour τ compris entre $+\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$.

tion du théorème de la constance de la vitesse horizontale.

Exercice. — Prendre comme variable la vitesse verticale $v_y = v \sin\tau$; on a $v_0 = V_0 \sin\alpha$. Les formules sont :

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{v_y}{v_0}\operatorname{tg}\alpha;\ t = \frac{1}{g}\left(v_0 - v_y\right);\ x = \frac{v_0}{g}\operatorname{cotg}\alpha\left(v_0 - v_y\right);$$

$$y = \frac{1}{2g}\left(v_0^2 - v_y^2\right).$$

20. **Équations intrinsèques**. — Si on projette les forces qui agissent en un point de la trajectoire sur la tangente et la normale en ce point, on sait qu'on obtient les équations différentielles dites *intrinsèques* de la trajectoire.

On aura sur la tangente :

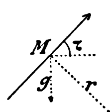


Fig. 5.

$$\frac{dv}{dt} = -g \sin \tau$$

et sur la normale :

$$\frac{v^2}{r} = -g \cos \tau,$$

r étant le rayon de courbure au point M.

D'après ces équations, on voit :

1° que $\frac{dv}{dt}$ s'annule pour $\tau = 0$ (sommet de la trajectoire). La vitesse v passe donc par un *minimum*. En effet, on a

$$\frac{d^2v}{dt^2} = -g \cos \tau \frac{d\tau}{dt} = g^2 \frac{\cos^2 \tau}{v}$$

c'est-à-dire une quantité positive.

2° que le rayon de courbure $r = -\frac{v^2}{g \cos \tau}$ est *minimum* au même point, puisque v est minimum et $\cos \tau = 1$, maximum. Pour la valeur r_s du rayon de courbure au sommet, on a : $r_s = -\frac{V_s^2}{g}$ ou en vertu du théorème de la constance de la vitesse horizontale $r_s = -\frac{u_0^2}{g}$.

§ 2. — TRAJECTOIRE DU VIDE

21. **Équation de la trajectoire.** — Dans le tableau du n° 19, l'expression de y en fonction de x [3e colonne, 4e ligne] représentera la *trajectoire ;* c'est l'équation suivante :

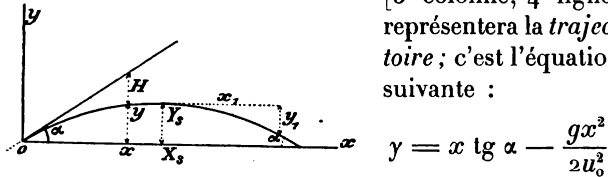


Fig. 6.

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2u_0^2}$$

La trajectoire est une parabole à axe vertical dont la tangente à l'origine a l'inclinaison α.

Par un déplacement parallèle des axes de coordonnées, il est aisé de mettre cette parabole sous la forme réduite. Il suffit, en effet, de poser :

$$x = \frac{u_0^2}{g} \operatorname{tg} \alpha - x_1 \qquad \text{et} \qquad y = \frac{u_0^2}{2g} \operatorname{tg}^2 \alpha - y_1.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation de la trajectoire, on obtient l'équation :

$$x_1^2 = \frac{2u_0^2}{g} y_1.$$

La parabole se trouve ainsi rapportée à son *sommet.* Ce point est aussi le *sommet* de la trajectoire qui se compose de deux branches symétriques : la branche *ascendante*, allant de l'origine au sommet, et la branche *descendante* située au delà du sommet.

S'il n'y avait pas de pesanteur, le projectile suivrait

constamment la ligne de projection, c'est-à-dire la droite $y = \text{tg}\ \alpha$. L'*abaissement* H est la quantité dont le projectile est tombé au-dessous de sa tangente initiale; il a pour expression

$$H = \frac{gx^2}{2u_0^2} \qquad \text{ou encore} \qquad H = \frac{1}{2} gt^2$$

d'après l'expression de t en fonction de x (tableau du n° 19, col. 3, lig. 2).

22. **Directrice et foyer.** — On sait que lorsque une parabole est mise sous la forme réduite $x^2 = 2py$, la *directrice* se trouve à une distance du sommet égale à $\frac{p}{2}$.

Or, nous avons mis l'équation de la trajectoire sous la forme réduite $x_1^2 = \frac{2u_0^2}{g} y_1$. On a donc $p = \frac{u_0^2}{g}$.

La *directrice* se trouve ainsi à une distance verticale $\frac{u_0^2}{2g}$ au-dessus du sommet. Mais le sommet lui-même, d'après le changement de coordonnées qui a été fait (21) se trouve à une distance $\frac{u_0^2}{2g}\ \text{tg}^2\ \alpha$ au-dessus de l'origine de la trajectoire.

Par suite, la *directrice* est à une distance

$$\frac{u_0^2}{2g}\left(1 + \text{tg}^2\ \alpha\right) = \frac{V_0^2}{2g}$$

au-dessus de l'origine. $\frac{V_0^2}{2g}$ est la *hauteur due* à la vitesse V_0, c'est-à-dire la hauteur h à laquelle s'élève le

projectile quand il est lancé verticalement de bas en haut avec la vitesse V_0.

Le *foyer* de la parabole se trouve à une distance $\frac{u_0^2}{2g}$ au-dessous du sommet.

23. **Vitesse du projectile en un point**. — Puisque, sur toute la trajectoire, la *vitesse horizontale* u est constante, on a, en un point d'inclinaison τ :

$$v = \frac{V_0 \cos \alpha}{\cos \tau}.$$

La vitesse qui est infinie pour $\tau = \frac{\pi}{2}$, extrémité de la branche ascendante, en amont de l'origine, décroît jusqu'au sommet où $\tau = 0$ et $V_s = u_0$. Sur la branche descendante, τ devient négatif et la vitesse v croît jusqu'à l'infini, pour $\tau = -\frac{\pi}{2}$, en repassant par les mêmes valeurs que sur la branche ascendante, pour des ordonnées égales.

On peut encore écrire directement, en appliquant le théorème des forces vives $v^2 = V_0^2 - 2gy$.

La vitesse du projectile au point y est la même que s'il était tombé de la directrice, c'est-à-dire d'une hauteur $\frac{V_0^2}{2g} - y$, en partant de cette directrice avec une vitesse nulle.

24. **Formules du sommet.** — Le sommet est défini par la condition $\tau = 0$.

Les 6 quantités qui subsistent dans les équations du tableau du n° 19 sont alors :

Données. . $\left\{\begin{array}{ll} u_0 & \textit{vitesse initiale horizontale.} \\ \operatorname{tg}\alpha & \textit{tangente de l'angle de projection.}\end{array}\right\}$ c.-à-d. V_0 et α.

Inconnues. $\left\{\begin{array}{ll} X_s & \textit{abscisse du sommet.} \\ Y_s & \textit{flèche de la trajectoire.} \\ T_s & \textit{durée du trajet correspondante.} \\ V_s & \textit{vitesse du projectile au sommet.}\end{array}\right.$

Comme on a $V_s = u_0$, il n'y a pas lieu de considérer la quantité V_s comme une inconnue dont il soit nécessaire de donner l'expression. Il reste donc 3 inconnues. Chacune des 5 quantités u_0, $\operatorname{tg}\alpha$, X_s, Y_s, T_s, est déterminée en fonction de deux des autres, de sorte que le nombre des formules possibles est le nombre de combinaisons de 5 objets pris 3 à 3, c'est-à-dire $\frac{5.4.3.}{1.2.3.} = 10$.

Mais, comme il se trouve que dans T_s et Y_s, les deux quantités u_0 et $\operatorname{tg}\alpha$ sont engagées seulement sous la forme du produit $u_0 \operatorname{tg}\alpha$, on n'aura point

$$T_s = f_1(Y_s, u_0) \text{ et } T_s = f_2(Y_s, \operatorname{tg}\alpha),$$

mais seulement $T_s = f_3(Y_s)$ équation obtenue en éliminant $u_0 \operatorname{tg}\alpha$ entre T_s et Y_s. De plus, il n'existera pas de relation $f_4(X_s, Y_s, T_s) = 0$ à cause de la dépendance mutuelle de Y_s et T_s. Donc, au lieu de 10 combinaisons, il n'existera en réalité que 8 formules distinctes.

Les *huit formules* du sommet sont les suivantes :

$$X_s = \frac{u_0^2}{g} \operatorname{tg}\alpha.$$

$$T_s = \frac{u_0}{g} \operatorname{tg}\alpha = \frac{X_s}{u_0} = \frac{\sqrt{X_s \operatorname{tg}\alpha}}{g}$$

$$Y_s = \frac{u_0^2}{2g} \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{gX_s^2}{2u_0^2} = \frac{X_s}{2} \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2} gT_s^2.$$

On a en plus $V_s = u_0$.

On peut remarquer que l'*abaissement* H_s du sommet est égal à la *flèche* Y_s.

25. **Formules du point de chute**. — Le point de chute est l'intersection de la trajectoire et d'une horizontale passant par la bouche du canon. Il est défini en faisant $y = 0$ dans les équations du tableau du n° 19.

Appelant ω l'*angle de chute*, l'équation (col. I, ligne 4)

$$y = \frac{u_0^2}{2g}\left(\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \tau\right)$$

donnera pour $y = 0$: $\operatorname{tg}^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \omega$

d'où $$\operatorname{tg} \omega = \pm \operatorname{tg} \alpha.$$

La trajectoire rencontre l'horizontale de la bouche aux deux points correspondants à $\omega = \pm \alpha$. Le premier $\omega = + \alpha$ est l'origine ; le second $\omega = - \alpha$ est le *point de chute*.

Si de plus, on remarque que la vitesse restante V_ω est connue, puisqu'elle est égale à la vitesse initiale V_0, on doit dire que, dans le problème de la recherche du point de chute ne figurent que quatre quantités susceptibles de se combiner en formules :

Données. .	u_0	*vitesse initiale horizontale.*	c.-à-d. V_0 et α.
	$\operatorname{tg} \alpha$	*tangente de l'angle de projection.*	
Inconnues.	X	*portée.*	
	T	*durée du trajet.*	

2.

Ces quatre variables, combinées 3 par 3 donnent les $\frac{4.3.2.}{1.2.3.} = 4$ formules qui suivent :

$$X = \frac{2u_0^2}{g} \operatorname{tg} \alpha$$

$$T = \frac{2u_0}{g} \operatorname{tg} \alpha = \frac{X}{u_0} = \sqrt{\frac{2}{g} X \operatorname{tg} \alpha}.$$

On a, en plus

$$\omega = -\alpha \qquad\qquad V_\omega = V_0$$

Ce sont les *formules du point de chute*.

On peut encore écrire les formules du point de chute, en mettant en évidence la variable V_0, au lieu de u_0 ; on a ainsi :

$$X = \frac{V_0^2}{g} \sin 2\alpha$$

$$T = \frac{2V_0}{g} \sin \alpha = \frac{X}{V_0 \cos \alpha} = \sqrt{\frac{2}{g} X \operatorname{tg} \alpha}.$$

Entre X et T on peut éliminer soit α, soit V_0 et obtenir les deux systèmes d'équations qui suivent :

$$X = V_0 T \sqrt{1 - \frac{g^2 T^2}{4V_0^2}} \quad \text{ou} \quad T^2 = \frac{2\,V_0^2 \pm 2\sqrt{V_0^4 - g^2X^2}}{g^2}$$

$$X = \frac{gT^2}{2} \operatorname{cotg} \alpha \qquad \text{ou} \qquad T^2 = \frac{2X}{g} \operatorname{tg} \alpha.$$

On exprimerait les éléments du sommet X_s, Y_s, T_s en

fonction des éléments du point de chute par les formules :

$$X_s = \frac{X}{2}; \qquad T_s = \frac{T}{2}; \qquad Y_s = \frac{1}{8} g T^2.$$

L'*abaissement* H_ω au point de chute étant exprimé par la formule $\frac{1}{2} g T^2$, est égal à 4 fois la flèche de la trajectoire.

26. **Formules différentielles.** — Les formules différentielles ont pour but de répondre à la question suivante : *les conditions initiales* α *et* V_0 *du tir sont un peu changées,* α *devenant* $\alpha + \partial\alpha$ *et* V_0 *devenant* $V_0 + \partial V$ *: quelles modifications très petites* ∂X, ∂T, ∂X_s, ∂Y_s *etc., subissent corrélativement les éléments du point de chute et du sommet ?*

Prenons, par exemple, la portée X dont l'expression développée est : $X = \frac{2V_0^2}{g} \sin\alpha \cos\alpha.$

Différentiant logarithmiquement, il viendra :

$$\frac{\partial X}{X} = \frac{2\partial V_0}{V_0} + \left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)\partial\alpha$$

et la parenthèse se réduit à $\frac{2}{\operatorname{tg} 2\alpha}$

En opérant un calcul analogue pour les autres éléments, on arrivera au tableau suivant :

Formules différentielles du point de chute.

$$\frac{\partial X}{X} = \frac{2\,\partial V_0}{V_0} + \frac{2}{\operatorname{tg} 2\alpha}\partial\alpha$$

$$\frac{\partial T}{T} = \frac{\partial V_0}{V_0} + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\partial\alpha$$

Formules différentielles du sommet.

$$\frac{\partial X_s}{X_s} = \frac{2\,\partial V_0}{V_0} + \frac{2}{\operatorname{tg} 2\alpha}\,\partial\alpha$$

$$\frac{\partial T_s}{T_s} = \frac{\partial V_0}{V_0} + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}\,\partial\alpha$$

$$\frac{\partial Y_s}{Y_s} = \frac{2\,\partial V_0}{V_0} + \frac{2}{\operatorname{tg} \alpha}\,\partial\alpha$$

$$\frac{\partial V_s}{V_s} = \frac{\partial V_0}{V_0} - \operatorname{tg} \alpha\,\partial\alpha.$$

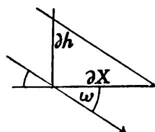


Fig. 7.

Pour le point de chute, on peut demander encore l'écart ∂h sur un panneau vertical, dû aux variations ∂V_0 et $\partial\alpha$.

Comme on a $\partial h = \partial X \operatorname{tg} \alpha$, on arrive aisément à la formule

$$\partial h = 2X \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial V_0}{V_0} + 2X \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha}\partial\alpha.$$

§ 3. — Famille des trajectoires a vitesse initiale constante

27. **Hypothèse.** — On suppose que d'un même point O, on lance des projectiles avec la même vitesse initiale V_0, mais sous des angles de projection différents. On obtient ainsi une famille de trajectoires qui jouissent de propriétés communes résultant de ce que, dans l'équation de la trajectoire écrite en mettant V_0 en évidence :

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2V_0^2 \cos^2 \alpha},$$

α est le seul paramètre variable.

Ce sont les principales propriétés de ces trajectoires que nous nous proposons d'examiner ici.

28. **Théorèmes sur les directrices, les foyers et les sommets des trajectoires $V_0 = \text{const}$. —** 1° *Toutes les trajectoires $V_0 = const.$ ont même directrice.* — Ce théorème résulte de la valeur $\frac{V_0^2}{2g}$ trouvée précédemment (22) pour la distance de la directrice au-dessus de l'origine O de la trajectoire, quel que soit l'angle de projection α.

2° *Le lieu des foyers des trajectoires $V_0 = const.$ est une circonférence.* — Soit F le foyer d'une de ces paraboles OSω ; soit D′DD″ la directrice. D'après la définition géométrique de la parabole et le théorème précédent, on a :

$$FO = OD' = \frac{V_0^2}{2g}.$$

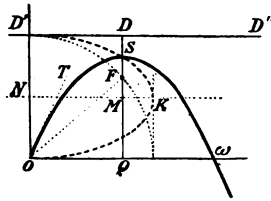


Fig. 8.

FO est ainsi constant et le lieu des foyers F est une circonférence ayant l'origine pour centre et pour rayon $\frac{V_0^2}{2g}$.

La tangente à l'origine OT est la bissectrice de l'angle D′OF d'après la propriété connue de la tangente à la parabole.

3° *Le lieu des sommets des trajectoires $V_0 = const.$ est une ellipse.* — Le sommet de la trajectoire OSω est en S, milieu de la perpendiculaire FD abaissée du foyer

sur la directrice. Soit la droite MN menée au milieu de OD'. On aura :

$$SF = \frac{1}{2} FD = \frac{1}{2}\left(\frac{V_0^2}{2g} - FQ\right)$$

$$FM = FQ - \frac{1}{2}\,\frac{V_0^2}{2g}$$

d'où $SM = SF + FM = \frac{1}{2} FQ$

Or, d'après le théorème précédent, on a

$$\overline{OQ}^2 + \overline{FQ}^2 = \left(\frac{V_0^2}{2g}\right)^2.$$

Posant $x = MN = OQ$ et $y = SM$, cette relation s'écrira : $x^2 + 4y^2 = \left(\frac{V_0^2}{2g}\right)^2.$

C'est l'équation d'une *ellipse* dont le centre est en N et qui a pour demi-grands axes $\frac{V_0^2}{2g}$ (horizontalement) et $\frac{V_0^2}{4g}$ (verticalement).

Les équations du n° 24 permettent d'ailleurs de trouver immédiatement cette ellipse. On a, en effet, les deux valeurs de Y_s suivantes :

$$Y_s = \frac{g\,X}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} = \frac{V_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

d'où en éliminant α entre ces deux relations :

$$X_s^2 + 4Y_s^2 = \frac{2V_0^2}{g}\,Y_s.$$

qui se réduit à la précédente ellipse, par le changement de l'axe des y en posant : $x = X_s$ et $y = Y_s - \frac{V_0^2}{4g}$.

Le sommet K de l'ellipse sur l'axe horizontal correspond à la valeur $Y_s = \frac{V_0^2}{4g}$ d'où $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}$ c'est-à-dire $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

L'éloignement maximum OS du sommet S à l'origine O correspond à la normale abaissée de O sur l'ellipse. X_s, Y_s étant les coordonnées du sommet, le carré de OS a pour expression :

$$\overline{OS}^2 = X_s^2 + Y_s^2 = \frac{V_0^4}{g^2}\left(\frac{\sin^2 \alpha}{4} + \cos^2 \alpha\right) \sin^2 \alpha$$

Pour avoir le maximum de OS, on égalera à zéro la dérivée du 2e membre par rapport à α. On obtient ainsi la condition

$$\sin \alpha \cos \alpha \,(2 - 3 \sin^2 \alpha) = 0$$

équation qui, outre les points O et D', fournit la solution

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}\,; \qquad \text{c'est-à-dire :} \qquad \alpha = 54^\circ 42'.$$

29. **Théorèmes sur la portée des trajectoires $V_0 =$ const.**

1° *Formule de la portée.* — On a :

$$X = \frac{2u_0^2}{g} \operatorname{tg} \alpha \qquad \text{ou} \qquad X = \frac{V_0^2}{g} \sin 2\alpha$$

2° *Les portées sous deux angles complémentaires sont égales.* — Car si on prend un angle de projection $\alpha' = \frac{\pi}{2} - \alpha$, la formule de la portée X' correspondante sera :

$$X' = \frac{V_0^2}{g} \sin(\pi - 2\alpha) = \frac{V_0^2}{g} \sin 2\alpha = X \quad \text{c. q. f. d.}$$

3° *L'angle de portée maximum* α_m *est égal à* $\frac{\pi}{4}$. — C'est, en effet, la valeur $\alpha_m = \frac{\pi}{4}$ qui rend sin 2α maximum et égal à 1.

La *portée maximum* X_m a pour valeur $X_m = \frac{V_0^2}{g}$. Elle est donc le double de la hauteur h due à la vitesse V_0 (22).

4° *Le foyer de la parabole de portée maximum est sur l'axe des x.* — Car le foyer est situé à une distance $\frac{V_0^2}{2g}$ de l'origine et sur la verticale du sommet; il est au milieu de la portée maximum $X_m = \frac{V_0^2}{g}$.

5° *La flèche de la trajectoire* Y_s *est le quart de l'abaissement* H_ω *du point de chute.* — Car, on a : $H_\omega = X \operatorname{tg} \alpha$ et $Y_s = \frac{X_s}{2} \operatorname{tg} \alpha = \frac{X}{4} \operatorname{tg} \alpha$; d'où $H_\omega = 4Y_s$.

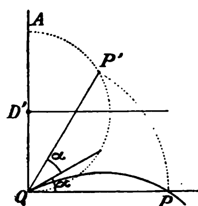


Fig. 9.

6° *Si du point D' de la directrice situé à une hauteur* $\frac{V_0^2}{2g}$ *au-dessus de l'origine O, on décrit une circonférence de rayon* $\frac{V_0^2}{2g}$, *la portée sous l'angle* α *est égale à la corde de l'arc* 2α.

Cela résulte immédiatement de la formule $X = \frac{V_0^2}{g} \sin 2\alpha$; car dans le triangle rectangle OAP', on a OP' = AO sin P'AO

ou
$$OP' = \frac{V_0^2}{g} \sin 2\alpha.$$

30. **Problème de la détermination de l'angle de projection** (V_0 = **const**.). — 1° *Étant donnée la vitesse initiale V_0 d'un projectile, sous quel angle doit-on le lancer pour atteindre un point donné A* (Démonstration géométrique.)

D'après le théorème du n° 28-2°, le foyer de la parabole répondant à la question doit se trouver d'abord sur la circonférence D'*d* de rayon $\frac{V_0^2}{2g}$, *lieu des foyers*.

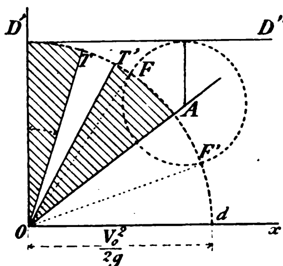


Fig. 10.

Il doit aussi se trouver, d'après la définition de la parabole, sur une autre circonférence ayant A pour centre et tangente à la directrice D' D".

L'intersection de ces deux circonférences donne, en général, deux points F et F', foyers de deux paraboles répondant à la question et déterminées par le *foyer*, la *directrice* et le *point* O.

2° *Relation entre les deux angles de projection.* — On appelle *ligne de site* la ligne OA allant de l'origine au but. Les tangentes à l'origine des deux trajectoires qui passent par le point O sont telles que l'*angle formé par l'une avec la ligne de site est égal à l'angle formé par l'autre avec la verticale.*

Soient OT et OT' ces deux tangentes : il faut démontrer que $\widehat{D'OT} = \widehat{T'OA}$. Or d'après les propriétés des tangentes à la parabole :

OT correspondant au foyer F est la bissectrice de $\widehat{D'OF}$.
OT' » F' » $\widehat{D'OF'}$.

On a donc :

$$\widehat{D'OA} = 2\widehat{D'OT} + \widehat{FOA} = 2\widehat{D'OT'} - \widehat{F'OA}$$

et comme $\widehat{FOA} = \widehat{F'OA}$, on a $\widehat{D'OT} = \widehat{D'OT'} - \widehat{F'OA}$; mais $\widehat{D'OT'} = \widehat{T'OF'}$; il viendra donc :

$$\widehat{DOT} = \widehat{T'OF} - \widehat{F'OA} = \widehat{T'OA}$$

C'est la propriété énoncée. On peut dire : *la ligne de site* OA *est la symétrique de la verticale par rapport à la bissectrice des tangentes* OT *et* OT' *à l'origine des deux trajectoires.*

3° *Portée maximum sur la ligne de site.* — Considérons le but se déplaçant sur une ligne de site OA. Il ne pourra être atteint par un projectile lancé de O que si la circonférence AFF' rencontre la circonférence fixe OD'. Le problème aura donc tantôt deux, tantôt zéro solution. Pour une certaine position de A, les deux circonférences AFF' et OD'*d* deviendront tangentes et les deux droites OT et OT' se confondront en une seule qui sera la *bissectrice de l'angle de la verticale et de la ligne de site.*

Cette bissectrice détermine un certain angle de projection qui donnera la *portée maximum* sur la ligne de site considérée.

4° *Parabole de sécurité.* — On désigne sous le nom de *parabole de sécurité* l'enveloppe de toutes les trajectoires tirées d'un même point O avec la même vitesse initiale V_0.

Si on considère deux trajectoires quelconques, elles se coupent d'après le théorème du n° 30-2°, sur une ligne de site symétrique de la verticale par rapport à la bissectrice de leurs tangentes à l'origine. Si les deux trajectoires se rapprochent indéfiniment, les deux tangentes, à la limite, se confondent avec cette bissectrice et le point M de *portée maximum* sur chaque droite issue de l'origine sera ainsi un point de l'enveloppe cherchée.

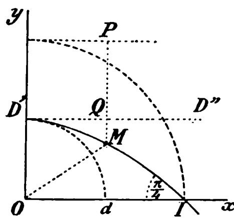


Fig. 11.

Ce point M est déterminé par la condition d'être également distant de la directrice D'D'' et de la circonférence OD'd, de rayon $\frac{V_0^2}{2g}$.

Le lieu de ce point M sera une *parabole à axe vertical* dont on obtiendra la directrice en prenant PQ = OD. On a alors, en effet, OM = MP ce qui définit une parabole de foyer O. Le sommet de cette parabole est en D', tel que $OD' = \frac{V_0^2}{2g}$; c'est la hauteur due à la vitesse V_0.

La parabole coupe l'axe des x en un point I sous l'angle de $\frac{\pi}{4}$ et la trajectoire de portée maximum X_m lui est tangente en ce point. On a $OI = 2Od = \frac{V_0^2}{g}$.

Cette courbe est la *parabole de sécurité*.

31. Figure résumant les diverses propriétés des trajectoires $V_0 = \text{const}$.

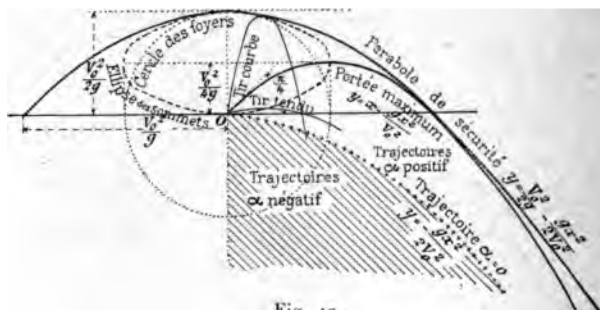


Fig. 12.

32. Trajectoire passant par un point donné : solution algébrique. — 1° Le problème de la détermination de l'angle de projection d'une trajectoire ($V_0 = \text{const.}$) passant par un point donné a reçu ci-dessus (30) une solution géométrique : *tracé d'une parabole déterminée par quatre conditions*. Il est utile de traiter la même question de manière à donner les formules algébriques propres à résoudre et à calculer numériquement les inconnues.

Soient a la distance horizontale de l'origine au point à battre, b la hauteur de ce point au-dessus du plan vertical passant par le point de départ.

L'*angle de site* est défini par la relation : $\operatorname{tg} \varepsilon = \dfrac{b}{a}$.

2° Puisque la trajectoire doit passer par le point dont les coordonnés sont a et b, on devra avoir, d'après l'équation de cette trajectoire :

$$b = a \operatorname{tg} \alpha - \frac{ga^2}{2V_0^2 \cos^2 \alpha}$$

équation où V_0 étant supposé donnée, l'inconnue est α.

Remplaçant $\frac{1}{\cos^2\alpha}$ par $1 + \text{tg}^2\alpha$, il viendra l'équation du second degré en tg α :

$$\text{tg}^2\alpha - \frac{2V_0^2}{g}\frac{1}{a}\,\text{tg}\,\alpha + \left(\frac{2V_0^2}{g}\frac{b}{a} + 1\right) = 0$$

qui détermine les deux valeurs suivantes de tg α :

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{2}{a}\left[\frac{V_0^2}{2g} \pm \sqrt{\frac{V_0^2}{2g}\left(\frac{V_0^2}{2g} - b\right) - \frac{a^2}{4}}\right].$$

Si la quantité sous le signe $\sqrt{\ }$ est *positive*, il y a deux angles α' et α'' qui répondent à la question ; si elle est *nulle*, les deux angles se réduisent à un seul ; si elle est *négative*, il n'existe pas de solution réelle.

3° *Relation entre les deux angles α' et α''.* — tg α' et tg α'' devant être les racines de l'équation du second degré, on aura :

$$\text{tg}\,\alpha' + \text{tg}\,\alpha'' = \frac{2V_0^2}{g}\frac{1}{a} \quad \text{et} \quad \text{tg}\,\alpha'\,\text{tg}\,\alpha'' = 1 + \frac{2V_0^2}{g}\frac{b}{a}$$

relations dont on peut déduire :

$$\frac{\text{tg}\alpha' + \text{tg}\alpha''}{1 - \text{tg}\,\alpha'\,\text{tg}\,\alpha''} = \text{tg}\,(\alpha' + \alpha'') = -\frac{a}{b} = -\frac{1}{\text{tg}\,\varepsilon}.$$

Donc : $\text{tg}\,(\alpha' + \alpha'')\,\text{tg}\varepsilon = -1$ ou $\text{tg}\,(\alpha + \alpha')\,\text{tg}\,(-\varepsilon) = 1$ et par suite :

$$\alpha' + \alpha'' - \varepsilon = \frac{\pi}{2} \qquad \text{ou} \qquad \alpha' - \varepsilon = \frac{\pi}{2} - \alpha''$$

Cette relation fait voir que les deux lignes de projection OT et OT' (fig. 10) sous lesquelles un projectile partant avec une vitesse déterminée V_0 atteint le but A, font des angles égaux $\widehat{T'OA} = \alpha' - \varepsilon = \frac{\pi}{2} - \alpha'' = \widehat{TOD'}$ avec la ligne

droite OA qui va au but et avec la verticale OD'. Par conséquent, elles s'écartent également de part et d'autre de la bissectrice de l'angle D'OA.

4° *Cas où les deux angles se réduisent à un seul.* — Pour que les deux racines de l'équation qui donne $\operatorname{tg} \alpha$ se réduisent à une seule, on devra avoir :

$$\frac{V_0^2}{2g}\left(\frac{V_0^2}{2g} - b\right) - \frac{a^2}{4} = 0.$$

La valeur unique de l'angle de projection, désigné alors par α_1, sera : $$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{V_0^2}{g}\,\frac{1}{a}.$$

En la portant dans l'équation de condition ci-dessus et en observant que $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \varepsilon$, on aura entre ε et α_1 l'équation $\operatorname{tg}^2 \alpha_1 - 2\operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \varepsilon = 1$. Complétant le carré du premier membre (en ajoutant de part et d'autre $\operatorname{tg}^2 \varepsilon$), on aura[1] :

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \varepsilon + \frac{1}{\cos \varepsilon}, \quad \text{ou :} \quad \sin \alpha_1 \cos \varepsilon - \sin \varepsilon \cos \alpha_1 = \cos \alpha_1$$

ou encore : $$\sin(\alpha_1 - \varepsilon) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right),$$

c'est-à-dire que la ligne de projection est la bissectrice de l'angle formé par la verticale et par la ligne de site.

5° *Portée sur un plan incliné.* — La portée X_ε sur un plan incliné de l'angle ε, comptée le long de ce plan, est : $X_\varepsilon = \frac{a}{\cos \varepsilon}$. Comme on a :

$$b = a \operatorname{tg} \alpha - \frac{ga^2}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{b}{a}$$

on obtiendra :

$$X_\varepsilon = \frac{a}{\cos \varepsilon} = \frac{2V_0^2}{g}\,\frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \varepsilon}{\cos \varepsilon} \cos^2 \alpha = \frac{2V_0^2}{g}\,\frac{\sin(\alpha - \varepsilon) \cos \alpha}{\cos^2 \varepsilon}$$

[1] La solution négative ne convient pas.

Pour avoir le maximum X_ε (max) de X_ε, puisque ε est constant, il faut égaler à zéro la dérivée du second membre par rapport à α, ce qui donne :

$$-\sin\alpha\sin(\alpha-\varepsilon)+\cos\alpha\cos(\alpha-\varepsilon)=0$$

c'est-à-dire : $\operatorname{tg}(\alpha-\varepsilon)=\operatorname{cotg}\alpha=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).$

Donc : $\alpha-\varepsilon=\frac{\pi}{2}-\alpha$ ou : $\alpha=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)$

La ligne de projection qui donne la plus grande portée est donc la bissectrice de l'angle formé par la verticale et la ligne de site.

Cherchons la valeur correspondante de la portée maximum X_ε (max).

On a : $X_\varepsilon=\frac{2V_0^2}{g}\frac{\sin(\alpha-\varepsilon)\cos\alpha}{\cos^2\varepsilon}=\frac{V_0^2}{g}\frac{\sin(2\alpha-\varepsilon)-\sin\varepsilon}{\cos^2\varepsilon}$

et pour $\alpha=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)$

il vient : $X_\varepsilon(\max)=\frac{V_0^2}{g}\frac{1-\sin\varepsilon}{\cos^2\varepsilon}=\frac{V_0^2}{g}\frac{1}{1+\sin\varepsilon}$

X_m étant la portée maximum pour $\varepsilon=0$, c'est-à-dire $X_m=\frac{V_0^2}{g}$ (29 — 3°) et b étant l'altitude du point touché (de sorte que $b=X_\varepsilon\sin\varepsilon$) on aura :

$$b+X_\varepsilon(\max)=X_m.$$

Donc un point ne peut être atteint que si la somme de son altitude b et de son éloignement $\sqrt{a^2+b^2}$ mesuré sur la ligne de site est inférieure ou au plus égale à la portée maximum X_m sur un plan horizontal. En d'autres termes on doit avoir : $b+\sqrt{a^2+b^2}\leqq\frac{V_0^2}{g}.$

6° *Parabole de sécurité.* — Ainsi, le plan de projection se trouve divisé en deux régions : l'une contient tous les points de coordonnées (a, b) qui peuvent être atteints de deux manières. L'autre région ne contient aucun de ces points. Ces deux régions sont séparées par une courbe qui répond à l'équation :

$$\frac{V_0^2}{2g}\left(\frac{V_0^2}{2g} - b\right) - \frac{a^2}{4} = 0$$

ou, en introduisant, au lieu de a, b, les coordonnées courantes, x et y :

$$y = \frac{V_0^2}{2g} - \frac{g}{2V_0^2}\, x^2.$$

Cette courbe renferme les points qui ne peuvent être atteints que d'une seule manière. C'est une *parabole* à axe vertical ayant son foyer au point O, son sommet au point $\frac{V_0^2}{2g}$ (hauteur maximum du jet vertical avec la vitesse V_0) et coupant l'axe des x à une distance égale à la portée maximum $X_m = \frac{V_0^2}{g}$.

On peut arriver au même résultat par la théorie des enveloppes. L'équation de la *parabole de sécurité* s'obtiendra en éliminant α entre l'équation de la trajectoire :

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2V_0^2 \cos^2 \alpha}$$

et la dérivée de cette équation par rapport à α qui est :

$$0 = \frac{x}{\cos^2 \alpha} - \frac{gx^2}{2V_0^2}\,\frac{2 \sin \alpha}{\cos^3 \alpha}$$

et qui se réduit à $\quad x \operatorname{tg} \alpha = \frac{V_0^2}{g}.$

L'élimination donne :

$$y = \frac{V_0^2}{2g} - \frac{g}{2V_0^2}\, x^2$$

comme ci-dessus. Chaque parabole particulière (α donné) touche la parabole de sécurité au point défini par la droite :

$$x \operatorname{tg} \alpha = \frac{V_0^2}{g} .$$

La parabole de sécurité est égale et parallèle à la trajectoire dont l'angle de projection α est égal à zéro.

7° *Portée sur un plan horizontal d'altitude* l. — En faisant $y = l$ dans l'équation de la trajectoire, on trouve pour valeur de la portée X_l sur ce plan, l'équation du second degré

$$gX_l^2 - 2V_0^2X_l \sin \alpha \cos \alpha + 2V_0^2 l \cos^2 \alpha = 0$$

d'où on déduit la formule :

$$X_l = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{2g} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{2gl}{V_0^2 \sin^2 \alpha}} \right]$$

1° Si $l < 0$, il existe toujours une seule valeur *positive* de X_l répondant à la question.

2° Si $l > 0$, il existe deux valeurs de X_l répondant à la question, ou une seule, ou aucune, suivant que l est inférieur, égal ou supérieur à $\frac{V_0^2}{2g}$.

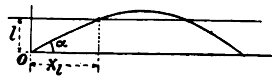


Fig. 13.

Pour obtenir la portée maximum X_l (max) sur le plan $y = l$, on formera $\frac{dX_l}{dx}$ d'après l'équation du second degré. Egalée à zéro, cette quantité donnera la relation $X_l \text{ (max)} = - l \operatorname{tg} 2\alpha_m$ qui portée dans l'équation du second degré déterminera l'angle α_m par la relation :

$$\cos 2\alpha_m = \frac{gl}{V_0^2 - gl} .$$

et la portée X_l (max) par la relation :

$$X\ (\max) = \frac{V_0^2}{g} \sqrt{1 - \frac{2gl}{V_0^4}}.$$

C'est l'intersection du plan l avec la parabole de **sécurité**.

33. **Lieu des points d'éclatement.** — *On suppose que des projectiles lancés avec la même vitesse initiale* $\mathbf{V_0}$ *sous des angles de projection variables, éclatent* **au bout** *d'un même temps* θ. *Quel est le lieu de leurs points d'éclatement?*

L'équation de la trajectoire étant :

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2V_0^2 \cos^2 \alpha}$$

et le temps étant lié à l'abscisse et à l'angle α **par la** relation $x = V_0 t \cos \alpha$, on éliminera α entre **ces** deux équations. En faisant $t = \theta$, il viendra :

$$y = x \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{V_0\theta}\right)^2}}{\left(\frac{x}{V_0\theta}\right)} - \frac{gx^2}{2V_0^2 \left(\frac{x}{V_0\theta}\right)^2},$$

qui se réduit à l'équation :

$$x^2 + y^2 + g\theta^2 y = g\theta^2 \left[\frac{V_0^2}{g} - \frac{g}{4}\theta^2\right]$$

C'est donc une circonférence qu'on peut mettre sous **la** forme : $x^2 + Y^2 = V_0^2\theta^2$, en posant : $y = Y - \frac{1}{2} g\theta^2$.

Le centre est au-dessous de l'origine à une distance égale à la hauteur de chute verticale $\frac{1}{2} g\theta^2$ pendant le temps θ. Le rayon est $V_0\theta$, parcours du projectile si la pesanteur n'agissait pas.

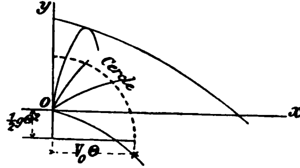


Fig. 14.

34. **Exercices**. — 1° Enveloppe du cercle, lieu des points d'éclatement quand θ varie. [Rép. : ellipse $x^2 + 3y^2 = \frac{V_0^4}{g^2}$].

2° On considère les deux trajectoires conjuguées d'angles de projection α et $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Démontrer que la droite qui joint à chaque instant les positions des deux projectiles conserve une direction constante : [Rép. elle est perpendiculaire à la bissectrice des tangentes à l'origine. Prendre la trajectoire sous la forme : $y = V_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} gt^2$.]

35. **Génération des trajectoires de la famille V_0 = constante**. — Soient deux trajectoires OA_1 et OA_2 de la famille V_0 constante ; considérons sur les tangentes initiales les deux longueurs OK_1 et OK_2 égales. On a sur la première trajectoire $OK_1 = \frac{x_1}{\cos\alpha_1}$ et sur la deuxième $OK_2 = \frac{x_2}{\cos\alpha_2}$.

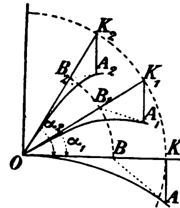


Fig. 15.

Or l'abaissement $y_1 - x_1 \operatorname{tg}\alpha_1$ de la première a pour expression $-\frac{g}{2V_0^2}\frac{x_1^2}{\cos^2\alpha_1}$,

c.-à-d. $\frac{g}{2V_0^2}\overline{OK_1}^2$. Pour le second l'abaissement on aura : $\frac{g}{2V_0^2}\overline{OK_2}^2$. L'égalité de OK_1 et OK_2 entraîne l'égalité des abaissements. On a ainsi

$$K_1A_1 = K_2A_2 = KA.$$

On peut donc déduire l'une de l'autre, par exemple de la trajectoire $\alpha = 0$, toutes les trajectoires de la famille V_0 = constante. A cet effet, sur OK_1 faisant avec OK un angle α_1, on rabattra K en K_1, puis sur la verticale de K_1 on prendra $K_1A_1 = KA$; A_1 est un point de la trajectoire α_1.

La propriété de l'abaissement constant appartient aussi à la tangente en K, qui joint deux points infiniment voisins de la trajectoire OK. Donc, pour avoir la tangente en A_1 on relèvera B en B_1 sur la tangente OK_1 et on joindra A_1B_1 qui sera la tangente cherchée.

Si on suppose des fils pesants attachés le long de OK et ayant leurs extrémités inférieures au profil de la parabole OA, il suffira de faire tourner la tige OK autour de O, pour que le profil inférieur des fils dessine constamment la trajectoire correspondant à l'angle α_1.

Remarque. — L'aire curviligne OK_1A_1 est équivalente à l'aire $OKA \times \cos\alpha_1$.

36. **Maximum de l'arc**. — *Dans la famille des trajectoires* V_0 = *const. quel est l'angle* α *de projection auquel correspond le plus grand arc de trajectoire depuis l'origine jusqu'au point de chute.*

Pour avoir la longueur S de l'arc s, de l'origine au

point de chute, il suffit, dans la formule du n° 18 :

$$s = \frac{V_0^2 \cos^2 \alpha}{g} \left[\xi_2(\alpha) - \xi_2(\tau) \right]$$

de faire $\tau = -\alpha$; $\xi_2(\tau)$ devenant $-\xi_2(\alpha)$, on a :

$$S = 2 \frac{V_0^2}{g} \cos^2 \alpha \, \xi_2(\alpha)$$

Cherchons le maximum de S, en faisant $\frac{dS}{d\alpha} = 0$.
On a :

$$\frac{dS}{d\alpha} = \frac{2V_0^2}{g} \left[-2 \cos \alpha \sin \alpha \, \xi_2(\alpha) + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^3 \alpha} \right]$$
$$= \frac{2V_0^2}{g} \left[\frac{1}{\cos \alpha} - 2 \cos \alpha \sin \alpha \, \xi_2(\alpha) \right]$$

Par suite, la condition du maximum sera :

$$\xi_2(\alpha) = \frac{1}{2 \sin \alpha \cos^2 \alpha},$$

ou, en développant $\xi_2(\alpha)$:

$$\frac{1}{2} \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{2} \operatorname{Log} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{1}{2 \sin \alpha \cos^2 \alpha}$$

qui devient :

$$\operatorname{Log} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \left(\frac{1}{\sin \alpha} - \sin \alpha \right) = \sin \alpha$$

d'où enfin :

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) = e^{\operatorname{cos\acute{e}c} \alpha}.$$

Cette équation est satisfaite pour $\alpha = 56°30'$. A cet angle correspond donc le maximum de l'arc de trajectoire situé au-dessus de l'horizontale de la bouche de la pièce.

§ 4. — Autres familles de trajectoires

37. **Deuxième famille. Trajectoires d'angle de projection constant (α = const.).** — Dans cette famille, la vitesse initiale V_0 varie, tandis que l'angle de projection α reste constant pour toutes les trajectoires considérées.

1° *Lieu géométrique des sommets des trajectoires* (α = *const.*). — Ce lieu est une *droite* qui partage en deux parties égales les segments compris entre la tangente initiale et l'horizontale de l'origine.

En effet, le sommet est défini par les deux équations :

$$X_s = \frac{u_0^2}{g} \operatorname{tg} \alpha$$

$$Y_s = \frac{u_0^2}{2g} \operatorname{tg}^2 \alpha$$

et l'élimination de u_0 donnera : $Y_s = \frac{X_s}{2} \operatorname{tg} \alpha$.

2° D'ailleurs cette proposition n'est qu'un cas particulier du théorème suivant : *Toutes les trajectoires* α = *const. sont homothétiques par rapport à l'origine et leur rapport de similitude est égal au rapport des carrés des vitesses initiales.*

En effet, si dans l'équation de la trajectoire

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2V_0^2 \cos^2 \alpha},$$

on pose $x = \left(\frac{V_0}{V'_0}\right)^2 x'$ et $y = \left(\frac{V_0}{V'_0}\right)^2 y'$

il vient : $y' = x' \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx'^2}{2V'^2_0 \cos^2 \alpha}$

ce qui est bien une autre trajectoire (α = const.).

3° *Lieu géométrique des foyers des trajectoires α = const.* — Ce lieu est une *droite*. On la construit en doublant l'angle α, ce qui donne la droite OB et en

Fig. 16.

menant de l'origine une perpendiculaire OF à cette droite AB.

On sait en effet que la tangente OT en O à la parabole est bissectrice de l'angle formé par une parallèle Oy à l'axe et par la droite OF qui passe par le foyer.

4° *Lieu des points d'éclatement des trajectoires* ($\alpha = const.$). — Si entre les deux relations :

$$x = V_0 t \cos \alpha \quad \text{et} \quad y = V_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2,$$

on élimine V_0 et si on fait $t = \theta$, quantité donnée, il viendra :

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{2} g \theta^2.$$

C'est l'équation d'une ligne droite parallèle à la tangente commune initiale ; elle coupe l'axe des y au point où, en chute libre, pour $V_0 = 0$, le corps serait parvenu au bout du temps θ.

5° *Trajectoire qui passe par un point donné* ($\alpha = const$). — Soient, comme au n° 32, a et b les coordonnées du point visé ; ε est l'angle de site, tel que $\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{b}{a}$.

On aura, pour l'équation de la trajectoire :

$$b = a \operatorname{tg} \alpha - \frac{g a^2}{2 V_0^2 \cos^2 \alpha},$$

équation où V_0 est l'inconnue.

On en tire : $$V_0^2 = \frac{g a^2}{2 \cos^2 \alpha \, (a \operatorname{tg} \alpha - b)}$$

d'où on peut déduire facilement la relation :

$$V_0 = \sqrt{\frac{g a \cos \varepsilon}{2 \cos \alpha \sin (\alpha - \varepsilon)}}$$

38. **Troisième famille. Trajectoires de vitesse horizontale constante ($u_0 = const.$).** — On peut définir une famille de trajectoires par une relation arbitraire $f(V_0, \alpha) = 0$ entre la vitesse initiale V_0 et l'angle de projection α. Une des plus intéressantes est la

famille définie par la relation $u_0 = V_0 \cos \alpha =$ const.

Voici quelques-unes des propriétés de ces courbes :

1° *Lieu géométrique des sommets des trajectoires* ($u_0 =$ *const.*). — En éliminant tg α entre les deux relations

$$X_s = \frac{u_0^2}{g} \operatorname{tg} \alpha \qquad \text{et} \qquad Y_s = \frac{u_0^2}{2g} \operatorname{tg}^2 \alpha$$

où u_0 doit être considéré comme une constante, on trouve pour lieu géométrique, la parabole

$$Y_s = \frac{g}{2u_0^2} X_s^2$$

qui est, à l'origine, tangente à l'axe des x.

2° *Lieu des foyers des trajectoires* ($u_0 =$ *const.*). — On sait (22) que la directrice est à une hauteur $\frac{u_0^2}{2g}$ au-dessus du sommet. Le foyer se trouve donc à une distance $\frac{u_0^2}{2g}$ au-dessous du sommet. Le lieu des foyers est alors une parabole égale à la parabole lieu des sommets, mais transportée parallèlement à elle-même d'une quantité $-\frac{u_0^2}{2g}$.

3° *Lieu des points d'éclatement des trajectoires* ($u_0 =$ *const.*). — Comme on a $x = u_0 t$, le lieu des points d'éclatement au temps θ est la verticale $x = u_0 \theta$.

4° *Lieu des points ayant même inclinaison* μ *sur les trajectoires* ($u_0 =$ *const.*). — En éliminant α entre

$$x = \frac{u_0^2}{g} (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \mu) \quad \text{et} \quad y = \frac{u_0^2}{2g} (\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \mu)$$

on trouve la parabole : $y = x \operatorname{tg} \mu + \frac{gx^2}{2u_0^2}$.

5° *Génération des trajectoires* ($u_0 = const$). — La trajectoire étant écrite : $y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2u_0^2}$, on voit que si u_0 est constant, l'*abaissement* $H = \frac{gx^2}{2u_0^2}$ est une quantité constante pour toutes les trajectoires de cette famille et pour la même valeur de l'abscisse x.

Fig. 17.

Ainsi la trajectoire II d'angle de projection α' se déduira point par point de la trajectoire I d'angle de projection α en menant la verticale C et en prenant $A'B' = AB$. De même on aura pour la trajectoire III ($\alpha = o$) $CC' = AB = A'B'$.

On peut démontrer que les tangentes en B et en B′ concourent en un même point I de l'axe Oy.

En effet, les points N et N′ sont sur une même verticale : cela résulte d'un théorème de la théorie de la parabole qui dit que « si par le point de rencontre N′ de deux tangentes ON′ et BN′ à la parabole, on mène une parallèle à l'axe (c'est-à-dire ici une verticale) elle coupe en son milieu la corde OB′ ». De même pour N relativement à ON et BN.

On aura donc, dans les triangles A′B′N′ et N′IO :

$$\frac{A'B'}{IO} = \frac{A'N'}{N'O} = \frac{AN}{NO},$$ et comme $AB = A'B'$, il viendra :

$$\frac{AB}{IO} = \frac{AN}{NO},$$ ce qui montre que BN passe en I,

c. q. f. d.

On trouve facilement que le segment IO a pour valeur

$$IO = \frac{V_0^2}{g} - \sqrt{\frac{V_0^4}{g^2} - x^2}.$$

39. **Quatrième famille ($V_0 \sin\alpha = \text{const}$).** — Ce sont des trajectoires ayant toutes même vitesse initiale verticale, même durée de trajet T de l'origine au point de chute, même flèche Y_s.

Lieu des sommets :

$$\text{Droite : } y = \frac{V_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

Lieu des foyers :

$$\text{Parabole : } y = \frac{V_0^2 \sin^2\alpha}{2g} - \frac{gx^2}{2V_0^2 \sin^2\alpha}$$

Lieu des éclatements :

$$\text{Droite : } y = V_0 \sin\alpha\,\theta - \frac{1}{2} g\theta^2.$$

On pourrait encore chercher les propriétés d'autres familles, $V_0 \operatorname{tg}\alpha = \text{const.}$ par exemple, ou $V_0 \sin 2\alpha = \text{const.}$ (trajectoires ayant même portées). Ces problèmes n'ont d'intérêt que comme exercices de géométrie analytique élémentaire.

40. **Autres familles de trajectoires.** — On peut définir des familles de trajectoires par des propriétés différentes de celles examinées ci-dessus et qui se rapportent exclusivement aux deux données à l'origine V_0 et α. Ainsi, le premier problème qui suit définit des trajectoires passant par l'origine et deux points ; le second

des trajectoires passant par l'origine, un point et ayant en ce point une tangente donnée.

1° *Premier problème. Trouver la vitesse initiale et l'angle de projection d'un projectile qui doit passer par deux points donnés.*

a_1 et b_1 sont les coordonnées du premier point.

a_2 et b_2 » du second.

On aura les deux équations

$$b_1 = a_1 \operatorname{tg} \alpha - \frac{ga_1^2}{2 V_0^2 \cos^2 \alpha}\,; \quad b_2 = a_2 \operatorname{tg} \alpha - \frac{ga_2^2}{2 V_0^2 \cos^2 \alpha}\,;$$

d'où on tire :

$$\operatorname{tg} \alpha - \frac{b_1}{a_1} = \frac{ga_1}{2 V_0^2 \cos^2 \alpha}$$

et

$$\operatorname{tg} \alpha - \frac{b_2}{a_2} = \frac{ga_2}{2 V_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

Et divisant les deux équations membre à membre, on aura :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b_1 a_2^2 - b_2 a_1^2}{a_1 a_2 (a_2 - a_1)}$$

Cette équation fait connaître l'angle α.

Retranchant membre à membre les deux mêmes équations, il vient : $\frac{b_1}{a_1} - \frac{b_2}{a_2} = \frac{a_2 - a_1}{2} \frac{g}{V_0^2 \cos^2 \alpha}$

d'où :

$$V_0 = \frac{1}{\cos \alpha} \sqrt{\frac{g}{2} \frac{a_1 a_2 (a_2 - a_1)}{a_2 b_1 - b_2 a_1}}$$

ce qui fait connaître la vitesse initiale V_0.

2° *Deuxième problème. Trouver la vitesse initiale et l'angle de projection d'un projectile qui doit arriver à un point donné sous un angle donné* τ.

a et b étant les coordonnées du point, on aura :

$$b = a \operatorname{tg} \alpha - \frac{ga^2}{2V_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

ou, en faisant $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \varepsilon$

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{ga}{2V_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

D'autre part :

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \tau = \frac{ga}{V_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

On en déduit :

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \tau}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \varepsilon} = 2, \qquad \text{d'où} \qquad \operatorname{tg} \alpha = 2 \operatorname{tg} \varepsilon - \operatorname{tg} \tau$$

et d'autre part :

$$V_0 = \frac{1}{\cos \alpha} \sqrt{\frac{g}{2} \frac{a}{\operatorname{tg} \varepsilon - \operatorname{tg} \tau}}$$

§ 5. — Problèmes divers

41. **Premier problème. Tir à ricochet.** — Soit un projectile sphérique lancé du point O avec la vitesse initiale V_0 sous l'angle α.

La sphère, qui n'est pas supposée parfaitement élastique, revient frapper le plan horizontal du point de départ en A_1 et avec la même vitesse V_0 qu'au départ. Elle rebondit et commence une nouvelle parabole, mais avec une vitesse initiale plus petite V_1 et sous un angle de projection plus petit α_1. Elle frappe de nouveau le sol en A_2 et ainsi de suite.

Quelles sont après le n[e] *bond la portée totale* ΣX_n *et la durée du trajet correspondante* ΣT_n ?

Admettons, comme cas intermédiaire entre celui des corps parfaitement élastiques et celui des corps mous, que si une sphère vient choquer une masse infiniment grande telle que

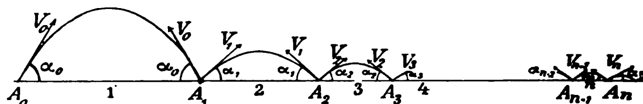


Fig. 18.

la terre, avec une vitesse normale v, elle rebondira normalement avec la vitesse ηv, η étant une fraction mesurant l'élasticité relative du sol et de la sphère ; pour les corps parfaitement élastiques $\eta = 1$; pour les corps mous $\eta = 0$.

Si la vitesse au choc V_0 fait un angle α_0 avec le plan horizontal, il suffira de décomposer le mouvement en deux autres perpendiculaires. Dans la direction horizontale, il n'y aura aucun choc ; donc la composante horizontale de la vitesse restera constante, ce qui se traduira par la formule $V_1 \cos \alpha_1 = V_0 \cos \alpha_0$.

Au contraire, dans la direction verticale, on a un choc normal, c'est-à-dire qu'on aura $V_1 \sin \alpha_1 = \eta\, V_0 \sin \alpha_0$.

Ces deux équations déterminent la direction α_1 et la grandeur V_1 de la vitesse initiale avec laquelle la sphère rebondissante quitte à nouveau le sol.

Soit alors X_n la n^e portée, entre A_{n-1} et A_n. On a

$$X_n = \frac{V_{n-1}^2}{g} \sin 2\alpha_{n-1} \qquad T_n = \frac{2\,V_{n-1}}{g} \sin \alpha_{n-1}$$

Mais on a, par hypothèse :

$$V_{n-1} \cos \alpha_{n-1} = V_{n-2} \cos \alpha_{n-2} \text{ et } V_{n-1} \sin \alpha_{n-1} = \eta\, V_{n-2} \sin \alpha_{n-2}$$

On pourra donc écrire :

$$X_n = \eta \frac{V_{n-2}^2}{g} \sin 2\alpha_{n-2} = \eta X_{n-1} \,;\; T_n = \eta \frac{V_{n-2}}{g} \sin \alpha_{n-2} = \eta T_{n-1},$$

de sorte qu'on aura les formules de récurrence suivantes :

$$X_n = \eta X_{n-1} \qquad T_n = \eta T_{n-1}$$
$$X_{n-1} = \eta X_{n-2} \qquad T_{n-1} = \eta T_{n-2}$$
$$\cdots \qquad \cdots$$
$$X_3 = \eta X_2 \qquad T_3 = \eta T_2$$
$$X_2 = \eta X_1 \qquad T_2 = \eta T_1$$

On en déduit :

$$X_n = \eta^{n-1} X_1 \qquad T_n = \eta^{n-1} T_1$$

et pour les sommes ΣX_n et ΣT_n (n variant de 1 à n)

$$\Sigma X_n = X_1 (1 + \eta + \eta^2 + \ldots + \eta^{n-1})$$
$$\Sigma T_n = T_1 (1 + \eta + \eta^2 + \ldots + \eta^{n-1})$$

c'est-à-dire :

$$\Sigma X_n = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha_0}{g} \frac{1-\eta^n}{1-\eta}; \quad \Sigma T_n = \frac{2V_0 \sin \alpha_0}{g} \frac{1-\eta^n}{1-\eta}.$$

Théoriquement, la sphère rebondira sur le sol en décrivant un nombre infini d'arcs de parabole ; mais cependant, la portée totale ΣX_∞ de l'origine au point où le corps revient au repos complet, et le temps total ΣT_∞ seront finis.

En effet, puisque η est une véritable fraction, pour $n = \infty$, on a lim. $\eta^n = 0$ et les formules deviennent :

$$\Sigma X_\infty = \frac{V_0^2}{g} \sin 2\alpha_0 \frac{1}{1-\eta}.$$
$$\Sigma T_\infty = \frac{2V_0}{g} \sin \alpha_0 \frac{1}{1-\eta}.$$

42. **Exercice proposé.** — *La pelote basque*. — D'un point A, la balle est lancée avec une vitesse V_0 constante, mais sous des angles α variables ; elle rebondit sur un mur vertical. Etant imparfaitement élastique, sa vitesse horizon-

tale u, normale au mur, devient $\eta_1 u$, η_1 étant une fraction comprise entre 0 et 1.

Quelle sera la trajectoire de la balle après le choc ? Sous quel angle doit-on la lancer pour qu'elle revienne au point de départ ?

43. Deuxième problème. Tir sur but élevé. — Dans la pratique du tir, lorsqu'il s'agit d'atteindre un but qui n'est pas sur l'horizon de la pièce, on applique souvent le procédé désigné sous le nom de *principe de la rigidité de la trajectoire*.

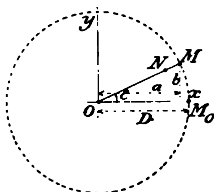


Fig. 19.

Si M est le but situé à la distance OM = D de l'origine O et si ε est l'*angle de site*, pour atteindre M, on donnera à la pièce une inclinaison $\alpha + \varepsilon$, α étant l'angle de projection correspondant à une portée horizontale égale à D.

On a donné (32-2°) la formule exacte qui permet de calculer le véritable angle de projection à employer ; cette formule est :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{a}\left[\frac{V_0^2}{2g} \pm \sqrt{\frac{V_0^2}{2g}\left(\frac{V_0^2}{2g} - b\right) - \frac{a^2}{4}}\right]$$

Nous chercherons ici à quelles erreurs conduit la méthode de pointage employée en pratique et définie ci-dessus.

Supposons donc que le but se déplace sur une circonférence de centre O et de rayon D. Il est vu ainsi successivement sous tous les angles de site ; ε variera de 0 à $\frac{\pi}{2}$ pour les angles positifs et de 0 à $-\frac{\pi}{2}$ pour les angles négatifs.

L'angle de projection pour chaque position du but est $\alpha + \varepsilon$; α est une constante, qui définit l'angle de projection auquel correspond une portée égale à D, quand $\varepsilon = 0$.

Cherchons le lieu géométrique des points de chute N de

chaque trajectoire $\alpha + \varepsilon$ sur la ligne de site correspondante ε. A cet effet, il suffira d'éliminer ε entre l'équation de la ligne de site $y = x \operatorname{tg} \varepsilon$, et l'équation de la trajectoire :

$$y = x \operatorname{tg}(\alpha + \varepsilon) - \frac{gx^2}{2V^2 \cos^2(\alpha + \varepsilon)}$$

On obtient aisément la formule

$$y = x \operatorname{cotg} \alpha - \frac{gx^2}{2V_0^2 \sin^2 \alpha}.$$

Donc, le *lieu géométrique cherché est la parabole de même portée que la trajectoire α. C'est la trajectoire d'angle $\frac{\pi}{2} - \alpha$.*

Quand on visera le point M, l'erreur sera la distance MN, N étant le point de chute. La parabole ci-dessus et le cercle de rayon OD se coupent en quatre points, dont deux au moins M_0 et M_3 sont réels. Cherchons l'intersection de la parabole, lieu des points N et du cercle

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{V_0^2 \sin^2 \alpha}{g}\right)^2.$$

En coordonnées polaires ρ et ε, la parabole s'écrit :

$$\rho = \frac{2V_0^2}{g} \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \varepsilon} \cos(\varepsilon + \alpha)$$

et le cercle $\rho = \frac{V_0^2}{g} \sin 2\alpha.$

On aura alors, pour déterminer ε la relation :

$$\cos \alpha \cos^2 \varepsilon = \cos(\varepsilon + \alpha).$$

Si, après avoir développé et élevé au carré cette équation, on supprime le facteur $\cos \varepsilon = 1$, qui correspond au point M_0, on arrive à la formule :

$$\cos^3 \varepsilon - \cos^2 \varepsilon + \cos \varepsilon \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha = 0$$ [1]

[1] On peut encore écrire cette formule : $\operatorname{tg} \alpha = \cos \varepsilon \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2}$.

équation du troisième degré qui détermine les points M_1 M_2 et M_3.

Afin de discuter les cas de réalité des racines, cherchons la condition pour que M_1 et M_2 coïncident ; ε_{12} et ε_3 étant alors les valeurs de deux racines, dont l'une ε_{12} est double, on aura :

$$(\cos \varepsilon - \cos \varepsilon_{12})^2 (\cos \varepsilon - \cos \varepsilon_3) = 0.$$

En développant et identifiant avec l'équation du troisième degré, il viendra :

$$2 \cos \varepsilon_{12} + \cos \varepsilon_3 = 1$$
$$\cos^2 \varepsilon_{12} + 2 \cos \varepsilon_{12} \cos \varepsilon_3 = \operatorname{tg}^2 \alpha'.$$
$$- \cos \varepsilon_3 \cos^2 \varepsilon_{12} = \operatorname{tg}^2 \alpha'.$$

De ces trois équations, à trois inconnues ε_{12}, ε_3, α' on déduit

$$\cos \varepsilon_{12} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \qquad \varepsilon_{12} = 51°, 49', 38''$$

(points M_1 M_2 réunis)

$$\cos \varepsilon_3 = \frac{-1+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} \qquad \varepsilon_3 = 56°, 20', 44''$$

(point M_3)

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\sqrt{5}-1)^3}{\sqrt{5}+3}} \qquad \alpha' = 16°, 42', 51''$$

(valeur de α correspondant à la réunion des points 1, 2.)

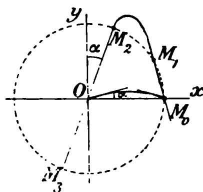


Fig. 20.

On peut alors discuter complètement le problème :

Premier cas : $\alpha < \alpha'$. — Les 4 racines sont réelles et distinctes 0, ε_1, ε_2, ε_3 ; les points M_1 et M_2 sont distincts. On peut former le tableau suivant :

ε	< 0	$= 0$	$< \varepsilon_1$	$= \varepsilon_1$	$< \varepsilon_2$	$= \varepsilon_2$	$> \varepsilon_2$	$= \frac{\pi}{2} - \alpha$
Sens des coups.	>	=	<	=	>	=	<	0

Le tableau suivant donne les valeurs des 2 racines ε_1 et ε_2 pour diverses valeurs de α ; elles proviennent de la résolution de l'équation du troisième degré qui donne cos ε.

$\alpha =$	0°	3°	6°	9°	12°	15°	16°	16° 43
$\varepsilon_1 =$	0°	5° 57	12° 12	19° 01	26° 47	37° 10	42° 26	51° 50
$\varepsilon_2 =$	90°	86° 51	83° 13	78° 54	73° 26	65° 16	60° 42	51° 50

Deuxième cas : $\alpha = \alpha'$. — Les points M_1 et M_2 sont confondus. La parabole d'angle $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ est tangente à la circonférence au point M_{12}. Les 3 racines sont 0, ε_{12}, ε_3.

On a alors le tableau suivant.

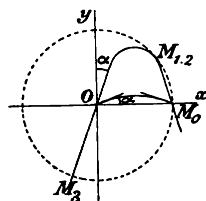


Fig. 21.

ε	< 0	$= 0$	$< \varepsilon_{12}$	$= \varepsilon_{12}$	$> \varepsilon_{12}$	$= \frac{\pi}{2} - \alpha$
Sens des coups.	>	=	<	=	<	0

On a

$$\left\{\begin{array}{l} \varepsilon_{12} = 51°,\ 49',\ 38'' \\ \varepsilon_3 = 56°,\ 20',\ 44'' \\ \alpha = 16°,\ 42',\ 51'' \end{array}\right.$$

Troisième cas : $\alpha > \alpha'$. — Les points M_1 et M_2 sont imaginaires. La parabole ne coupe plus la circonférence qu'aux points M_0 et M_3.

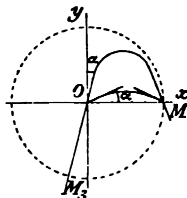


Fig. 22.

Le tableau du sens des coups est le suivant.

ε	< 0	$= 0$	> 0	$= \frac{\pi}{2} - \alpha$
Sens des coups.	$>$	$=$	$<$	0

44. **Exercices proposés**. — 1. Un point pesant est lancé d'un point O avec la vitesse V_0 ; déterminer l'angle de projection α de manière à rendre maximum la distance du point o au point de rencontre du projectile avec un plan horizontal situé à la hauteur l au-dessous du point de départ.

$$\left(\text{On trouve :} \qquad \cos 2\alpha = \frac{gl}{V_0^2 + gl}\right).$$

2. Soient un plan incliné de l'angle ε sur l'horizontale, OA une ligne de plus grande pente et ON une normale de ce plan. Du point O, on lance dans le plan AON un projectile qui fait un angle φ avec OA. Calculer : 1° l'angle φ_1, qu'il fait avec OA au premier point de chute sur le plan; 2° l'angle φ_n qu'il fait après avoir rebondi $(n - 1)$ fois, en supposant le plan parfaitement élastique. Montrer que la vitesse suivant ON est la même à l'arrivée qu'au départ.

(OA et ON étant pris pour axes, on trouve

$$\cot \varphi_1 = \cot \varphi + 2 \operatorname{tg} \varepsilon).$$

3. Est-il possible, du sommet de la pyramide de Chéops, de lancer à la main une pierre qui puisse atteindre le sol sans toucher le côté incliné de la pyramide ?

(La hauteur de la pyramide est $137^m,2$; la longueur d'un côté du carré de base est $227^m,5$; la vitesse initiale avec laquelle on peut lancer une pierre à la main est de 25^m par sec.)

4. D'un point A d'une verticale, on lance verticalement un projectile avec une vitesse V_0. D'un point B de la même verticale on lance verticalement un autre projectile, un temps θ après le premier et avec la vitesse V'_0. Quels seront leurs points de rencontre ?

5. Démontrer géométriquement la propriété du n° 43 : le lieu des points de chute sur une droite inclinée de l'angle de site ε quand on tire avec un angle de projection $\alpha + \varepsilon$ est la parabole d'angle de projection $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$. ($\alpha$ est supposé constant ; ε est variable.)

6. Dans le problème du tir sur but élevé :

a) Trouver l'équation de la *courbe neutre*, lieu des points du plan vertical qu'on peut atteindre avec la même hausse que celle qui donne la même portée sur le plan horizontal.

(Eliminer α entre les équations

$$\operatorname{tg} \alpha = \cos \varepsilon \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2} ; \qquad \rho = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

On trouve : $\rho = \dfrac{2V_0^2}{g} \dfrac{\cos \varepsilon \sin \varepsilon}{1 + \cos \varepsilon + \cos^2 \varepsilon - \cos^3 \varepsilon}$)

b) Quel est l'écart maximum du point de chute sur la droite d'inclinaison ε et du but situé sur cette droite à une distance $\rho = \dfrac{V^2 \sin 2\alpha}{g}$, l'angle de projection étant $\alpha + \varepsilon$.

(Égaler à zéro la dérivée $\frac{d\rho}{d\varepsilon}$ de la courbe des points de chute. C'est la recherche des normales menées de l'origine à la parabole $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha.\right)$ On trouve :

$$\sin \varepsilon = \pm \sqrt{\frac{1 - 2 \operatorname{tg}^2 \alpha \pm \sqrt{1 - 8 \operatorname{tg}^2 \alpha}}{2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)}}\Bigg).$$

c) Quand α varie, trouver le lieu des points qui correspondent au maximum précédent.

$$\left(\text{Ellipse :} \qquad x^2 + 4y^2 - \frac{2V^2}{g} y = 0\right).$$

d) Valeur exacte de l'angle β qui relie α et ε.

$$(\operatorname{tg} \beta \sin 2\alpha = 1 \pm \sqrt{1 - 2 \sin 2\alpha \operatorname{tg} \varepsilon - \sin^2 2\alpha}.)$$

e) L'abscisse x' du point atteint sur la ligne de site ε en tirant avec l'angle $\alpha + \varepsilon$ est telle que

$$x' = \frac{V^2 \sin 2\alpha}{g} (1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varepsilon).$$

7. En chaque point de la trajectoire et sur la normale en ce point on porte une longueur inversement proportionnelle à la vitesse du projectile. Lieu de ces points.
(Contour apparent d'un jet d'eau lancé obliquement.)

8. Dans la famille des trajectoires $V_0 = \text{const.}$, lieu des points où l'inclinaison τ de la tangente a une même valeur τ_1.

9. Équation de la trajectoire en coordonnées polaires.

10. Démontrer que l'équation de la trajectoire peut se mettre sous la forme

$$y = x \operatorname{tg} \alpha \left(1 - \frac{x}{X}\right).$$

11. Dans le problème de la trajectoire passant par un point donné (32-2°), posant : $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \varepsilon$, transformer l'équation de condition : $\operatorname{tg} \alpha - \frac{ga}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} = \operatorname{tg} \varepsilon$, de manière à lui donner la forme :

$$\sin (2\alpha - \varepsilon) = \frac{ga}{V_0^2} \cos \varepsilon + \sin \varepsilon.$$

Discuter cette équation.

12. Si la parabole décrite par un point pesant dans le vide coupe une droite en deux points A et B, les vitesses du mobile en ces deux points, estimées suivant une perpendiculaire à AB, sont égales et de sens contraire.

13. Deux points matériels m et m' partent sans vitesse initiale du même point d'altitude H et tombent suivant la loi de la chute dans le vide. Leur écart initial étant ε, quel sera leur écart ζ à l'altitude o ? (Poussière d'eau).

(On trouve : $\zeta = 2\sqrt{H\varepsilon} - \varepsilon$.)

14. Dans le problème du n° 30, démontrer que les tangentes OT et OT′ aux deux trajectoires qui passent par le point A passent par l'intersection de deux cercles :

1° Le cercle de centre O et de rayon $\frac{V_0^2}{2g}$.

2° Un cercle de rayon $\left(\frac{V_0^2}{2g} - y\right)$ ayant son centre sur la verticale du point A à une hauteur y au-dessus de la directrice.

(Discuter le problème.) (Baills.)

§ 6. — Tableau des principales formules du mouvement dans le vide

45. Résumé.

1) *Notations.*

V_0	= vitesse initiale en mètres par seconde.	α	= angle de projection.
g	= accélération de la pesanteur m. p. s.	x, y	= coordonnées en m. du projectile au temps t. Axes rectangulaires : ox positif dans la direction du tir ; oy positif vers le haut.
t	= temps en secondes.		
v	= vitesse en m. p. s. du projectile au point xy.		
X	= portée en mètres.		
X_s, Y_s	= coordonnées du sommet de la trajectoire.	τ	= inclinaison de la tangente au point xy.

2) *Équation de la trajectoire parabolique :*

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2V_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

3) *Vitesse v en un point :*

$$v^2 = V_0^2 - 2gy. \qquad (\text{au sommet } V_s = V_0 \cos \alpha)$$

4) *Inclinaison τ en un point :*

$$\operatorname{tg} \tau = \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx}{V_0^2 \cos^2 \alpha}. \qquad (\text{angle de chute } \omega = - \alpha)$$

5) *Portée :*

$$X = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

$$\left(\text{maximum pour } \alpha = \frac{\pi}{4}. \text{ Portée maximum } X_m = \frac{V_0^2}{g}\right)$$

6) *Coordonnées du sommet :*

$$X_s = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{2g}; \qquad Y_s = \frac{V^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

7) *Temps t au point xy :*

$$t = \frac{V_0 \cos \alpha}{g}.$$

Durée totale du trajet jusqu'au point de chute :

$$T = \frac{2V_0 \sin \alpha}{g}$$

Pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$, on a : $T = \frac{V_0}{g}\sqrt{2} = \sqrt{\frac{2X}{g}}$.

8) *Équation de la parabole de sécurité :*

$$x^2 + \frac{2V_0^2}{g} y = \frac{V^4}{g^2}$$

9) *Angle de projection qui permet d'atteindre un but de coordonnées a et b :*

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{V_0^2}{g} \pm \frac{1}{a}\sqrt{\frac{V_0^4}{g^2} - \frac{2V_0^2}{g} b - a^2}$$

$+$ tir courbe ; $-$ tir tendu.

10) *Vitesse initiale qui permet d'atteindre un but déterminé (a, b) sous un angle de projection donné :*

$$V_0 = \sqrt{\frac{ag}{2 \sin (\alpha - \varepsilon)} \frac{\cos \varepsilon}{\cos \alpha}}.$$

avec

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{b}{a}.$$

11) *Terrain incliné* (ε = inclinaison positive du plan sur l'horizontale).

Portée X_ε, mesurée sur le plan incliné ; l'angle de projection est compté à partir de l'horizontale :

$$X_\varepsilon = \frac{2V_0^2}{g}\cos\alpha\,\frac{\sin(\alpha-\varepsilon)}{\cos^2\varepsilon}.$$

La durée du trajet T_ε, pour atteindre X_ε est :

$$T_\varepsilon = \frac{2V_0}{g}\,\frac{\sin(\alpha-\varepsilon)}{\cos\varepsilon}.$$

12) *Point de chute*. Connaissant *deux* des quatre quantités V_0, α, X et T, déterminer les deux autres.

DONNÉES	SOLUTIONS	
α, V_0	$X = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}$	$T = \frac{2V_0 \sin\alpha}{g}$
α, X	$V_0 = \sqrt{\frac{gX}{\sin 2\alpha}}$	$T = \sqrt{\frac{2X\,\mathrm{tg}\,\alpha}{g}}$
α, T	$V_0 = \frac{gT}{2\sin\alpha}$	$X = \frac{gT^2}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}$
V_0, X	$\sin 2\alpha = \frac{gX}{V_0^2}$	$T = \frac{1}{g}\left(\sqrt{V_0^2+gX} \pm \sqrt{V_0^2-gX}\right)$
V_0, T	$\sin\alpha = \frac{gT}{2V_0}$	$X = \sqrt{V_0^2T^2 - \frac{1}{4}g^2T^4}$
X, T	$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{gT^2}{2X}$	$V_0 = \sqrt{\frac{1}{4}g^2T^2 + \frac{X^2}{T^2}}$

CHAPITRE II

MOUVEMENT RECTILIGNE DANS UN MILIEU RÉSISTANT

§ 1. — Formules du mouvement rectiligne horizontal

46. **Hypothèses**. — L'hypothèse inverse de celle du mouvement dans le vide s'obtiendra en supposant que des deux forces qui agissent sur le projectile, savoir : la *gravité* g et la *résistance de l'air* $cF(v)$, la première g est nulle (14). C'est le second cas-limite du problème balistique.

Cette circonstance se présentera en pratique, avec une approximation plus ou moins grande, dans trois cas distincts.

Premier cas. — Le mouvement sera rectiligne quand la perte de poids du projectile plongé dans le milieu est égale à son poids. Ce sera, par exemple, le cas du mouvement horizontal d'un corps flottant sur un liquide en repos.

Deuxième cas. — Ce mouvement sera encore rectiligne, en première approximation tout au moins, lorsque g sera très petit devant $cF(v)$. Cette circonstance se réalisera pour des valeurs suffisamment grandes de la fonction $F(v)$ qui tend vers l'infini en même temps que la vitesse.

Troisième cas. — Enfin, le mouvement est encore rectiligne, en première approximation, lorsqu'on considérera un arc de trajectoire très voisin du sommet de cette courbe et tel que les inclinaisons τ aient des valeurs extrêmement voisines de zéro. La vitesse en un point et la résistance tangentielle se projetteront alors très approximativement en vraie grandeur sur une horizontale et l'arc de trajectoire différera infiniment peu de la corde horizontale qui le sous-tend. Ce cas doit donc être considéré comme un *cas-limite* du problème balistique correspondant à $\tau = 0$.

47. **Équations du mouvement.** — Soit $cF(v)$ la résistance du milieu, supposée tangentielle. Prenons pour axe des x la direction du mouvement, qu'on peut supposer horizontale ; on aura, pour définir ce mouvement, la seule équation différentielle :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -cF(v).$$

Comme, par définition de la vitesse v, on a $v = \dfrac{dx}{dt}$, l'équation différentielle pourra s'écrire :

$$\frac{dv}{dt} = -cF(v)$$

d'où l'on déduira le *temps* t par l'intégrale

$$t = -\frac{1}{c}\int_{V_0}^{v}\frac{dv}{F(v)}$$

en désignant par v la vitesse au temps t et par V_0 la *vitesse initiale* pour laquelle on suppose $t = 0$.

Pour avoir l'*espace* x, on écrira :

$$\frac{vdv}{vdt} = - cF(v) \qquad \text{ou} \qquad \frac{vdv}{dx} = - cF(v).$$

ce qui donnera x par l'intégrale :

$$x = -\frac{1}{c}\int_{V_0}^{v}\frac{vdv}{F(v)}$$

en prenant $x = 0$, pour $t = 0$ et pour $v = V_0$.

48. **Fonctions S(v) et D(v).** — Le problème est donc résolu, moyennant les deux quadratures indiquées. Avec la fonction $F(v)$ donnée soit par une expression analytique, soit par une table numérique, on saura toujours calculer, une fois pour toutes, les tables de ces deux intégrales.

Ces tables seront à simple entrée et feront connaître en regard de la vitesse v les produits ct ou cx.

Supposons ces tables construites et représentons les deux intégrales par les notations suivantes :

$$\mathbf{S}(v) = -\int_{V}^{v}\frac{dv}{F(v)} \qquad\qquad \mathbf{D}(v) = -\int_{V}^{v}\frac{vdv}{F(v)}$$

V est une vitesse arbitraire choisie pour origine des tables, pour laquelle on supposera, par exemple $\mathbf{S}(V) = 0$ et $\mathbf{D}(V) = 0$. V sera avantageusement choisie en dehors des limites des vitesses qu'on aura à utiliser en pratique de manière que les nombres de la table soient tous de même signe.

Les équations qui donnent t et x seront alors :

$$t = \frac{\mathbf{S}(v) - \mathbf{S}(V_0)}{c} \qquad x = \frac{\mathbf{D}(v) - \mathbf{D}(V_0)}{c}.$$

ou encore, par abréviation :

$$t = \frac{\mathbf{S} - \mathbf{S}_0}{c} \qquad x = \frac{\mathbf{D} - \mathbf{D}_0}{c}.$$

La table pourra être disposée comme il suit, avec la vitesse v pour argument et $V = 1200^m$ par exemple.

v	ct	cx
1200	0,0000	0,0000
1199	$0,0^2 281$	$0,0^5 234$
1198	$0,0^2 562$	$0,0^5 468$
....	......	......

Dans la colonne ct est la fonction $\mathbf{S}(v)$; dans la colonne cx est la fonction $\mathbf{D}(v)$. Par de simples additions ou soustractions, on saura ainsi résoudre les différents problèmes qui pourront se présenter en pratique.

49. **Théorèmes.** — Les théorèmes qui suivent résultent immédiatement des formules établies ci-dessus.

1° Si deux projectiles de coefficients balistiques c et c' sont lancés avec une même vitesse initiale V_0, les parcours x et x' et les temps t et t' au bout desquels leur vitesse sera devenue v sont inversement proportionnels à leurs coefficients balistiques : $cx = c'x'$ et $ct = c't'$.

2° La table de la fonction $\mathbf{D}(v)$ donne, pour chaque

vitesse, dans la colonne *cx* le chemin nécessaire au projectile de coefficient balistique égal à l'unité pour perdre un mètre de vitesse.

3° Propriété analogue pour le temps dans la colonne *ct*.

50. **Fin du mouvement.** — Nous supposons que $F(v)$ est une fonction *continue*, essentiellement *positive* et *croissante* avec v jusqu'à l'infini. Pour $v = 0$, la fonction $F(v)$ tend vers une limite finie qui peut être o.

Considérons, à partir de l'origine V_0, le *temps total* T écoulé et l'*espace total* X parcouru lorsque la vitesse v sera devenue égale à zéro. $F(v)$ est une fonction décroissante avec v et cette dernière quantité décroît quand t augmente, en vertu de la relation $\frac{dv}{dt} = -cF(v)$, où le second membre est négatif.

Soit n un exposant tel que $v^{-n}F(v)$ ait pour limite une quantité finie quand v tend vers zéro. Cela revient à poser, dans le voisinage de $v = 0$: $F(v) = v^n[a + b\psi(v)]$, la fonction $\psi(v)$ tendant vers zéro avec v ; on aura ainsi le développement de $F(v)$ suivant les puissances de v au voisinage du point $v =$ zéro.

Soit v_1 une vitesse assez voisine de zéro pour que le développement précédent s'y applique ; le temps t_1 mis pour aller de V_0 à v_1, ainsi que l'espace x_1 sont finis, puisque dans ces limites, le dénominateur $F(v)$ des intégrales ne devient pas nul.

Entre v et v_1, on aura :

$$ct_1 = -\int_{v_1}^{v} \frac{dv}{F(v)} = -\int_{v_1}^{v} \frac{dv}{av^n} = \frac{1}{a}\,\frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{v^{n-1}} - \frac{1}{v_1^{n-1}}\right]$$

$$cx_1 = -\int_{v_1}^{v} \frac{vdv)}{F(v)} = -\int_{v_1}^{v} \frac{dv}{av^{n-1}} = \frac{1}{a}\,\frac{1}{n-2}\left[\frac{1}{v^{n-2}} - \frac{1}{v_1^{n-2}}\right]$$

Faisons tendre maintenant v vers zéro.

Différents cas se présenteront suivant la valeur de l'exposant n qui doit être supposé d'ailleurs $\geqq 0$ d'après l'hypothèse faite sur la fonction $F(v)$.

Ils sont résumés dans le tableau suivant :

n	$= 0$	< 1	$= 1$	< 2	$= 2$	> 2
$T =$	fini	fini	∞	∞	∞	∞
$\lambda =$	fini	fini	fini	fini	∞	∞

51. **Origine du mouvement**. — Supposons maintenant que le projectile soit lancé avec une vitesse initiale V_0 infinie et cherchons si, pour atteindre une vitesse v finie, le *temps* t_∞ et l'*espace* x_∞ seront finis ou infinis. Le raisonnement sera le même que dans le cas précédent, en posant pour de très grandes valeurs de v :

$F(v) = v^{n'}[a' + b'\psi'(v)]$, l'exposant n' étant tel que $v^{-n'}F(v)$ ait une valeur finie pour $v = \infty$.

On aura donc les mêmes formules que dans le cas précédent, c'est-à-dire :

$$ct = \frac{1}{a'}\frac{1}{n'-1}\left[\frac{1}{v^{n'-1}} - \frac{1}{V_0^{n'-1}}\right]$$

$$cx = \frac{1}{a'}\frac{1}{n'-2}\left[\frac{1}{v^{n'-2}} - \frac{1}{V_0^{n'-2}}\right]$$

On fera alors $V_0 = \infty$ dans ces formules, et, suivant les valeurs de n', on pourra dresser le tableau suivant :

n'	$= 0$	< 1	$= 1$	< 2	$= 2$	> 2
$t_\infty =$	∞	∞	∞	fini	fini	fini
$x_\infty =$	∞	∞	∞	∞	∞	fini

52. **Exemples.** — Supposons que la fonction $F(v)$ puisse être mise sous la forme d'un polynome ordonné suivant les puissances ascendantes de v :

$$F(v) = A_0 v^n + A_1 v^{n-1} + \ldots + A_{n'} v^{n'}. \qquad n' > n.$$

1° Pour que la trajectoire du projectile depuis $V_0 = \infty$ jusqu'à $v = 0$ soit finie, il faut que n soit plus *petit* que 2, et que n' soit plus *grand* que 2.

Par exemple : $F(v) = A_0 v\,(1 + bv^2)$.

2° Pour que le temps, de $V_0 = \infty$ à $v = 0$, soit fini, il faut que n soit plus *petit* que 1, et n' plus *grand* que 1.

Par exemple : $F(v) = A + bv^2$.

3° Enfin pour qu'à la fois le temps et l'espace soient finis, il faut que $n < 1$ et $n' > 2$.

Par exemple : $F(v) = a + bv^2 + cv^3$.

4° A remarquer le cas $1 < n' < 2$, où l'espace x_∞ est infini tandis que le temps t_∞ est fini.

§ 2. — Discussion du mouvement

53. **Courbe (v, cx).** — Pour se rendre compte plus aisément des propriétés du mouvement rectiligne horizontal, construisons une courbe en prenant pour abscisses

les vitesses v et pour ordonnées les produits cx. Comme on a : $cx = \mathbf{D}(v) - \mathbf{D}(V_0)$, cette courbe représentera la fonction $\mathbf{D}(v)$.

Tout d'abord cherchons les tangentes aux deux extrémités de la courbe. On a pour la tangente en un point quelconque :

$$\frac{cdx}{dv} = -\frac{v}{F(v)}.$$

Cette expression se présente sous la forme $\frac{0}{0}$ pour $v = 0$ (à moins que $F(v)$ ne renferme une constante, auquel cas : $\lim \frac{cdx}{dv} = 0$). Pour $v = \infty$, elle se présente sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$.

Donc dans les deux cas on aura :

$$\lim.\left(\frac{cdx}{dv}\right) = -\frac{1}{F'(v)}.$$

1° *Tangente au point* S *où* $v = 0$ — n étant comme précédemment l'exposant qui convient à la fonction $\mathbf{F}(v)$ dans le voisinage de $v = 0$, on aura : $F'(v) = nv^{n-1}$. Donc, pour $v = 0$:

si $n - 1 > 0$ la tangente en S est *verticale*
$n - 1 = 0$ » *inclinée*
$n - 1 < 0$ » *horizontale*.

2° *Tangente au point* Ω *où* $v = \infty$. — n' étant dans le voisinage de $v = \infty$ l'exposant qui convient à la fonction $F(v)$, on aura $F'(v) = n'v^{n'-1}$. Donc, pour $v = \infty$:

si $n' - 1 > 0$ la tangente en Ω est *horizontale*
$n' - 1 = 0$ » *inclinée*
$n' - 1 < 0$ » *verticale*.

3° *Les formes de la courbe* (v, cx). — D'après la discussion précédente, on peut distinguer un certain nombre de types de courbes (v, cx) différenciées par leur allure aux points o et ∞. D'ailleurs les formes en ces deux points sont totalement indépendantes l'une de l'autre, de sorte qu'on peut combiner une forme du premier tableau avec une quelconque du second.

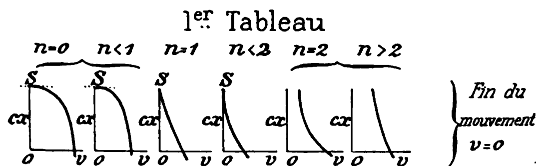


Fig. 23.

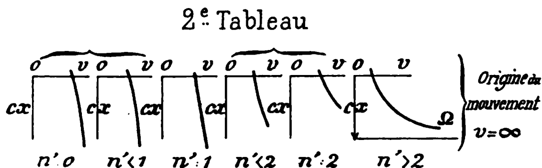


Fig. 24.

4° *Remarques*. — *a*) Les courbes réunies par une accolade ne diffèrent point essentiellement comme formes. Il y a donc seulement quatre formes distinctes pour chaque tableau, soit au total, en les combinant de toutes les manières, seize formes de la courbe totale, de $v = \infty$ à $v = 0$.

b) Quand $n = 0$, l'équation $cdx = -\frac{vdv}{k}$ est celle d'un mouvement uniformément retardé d'accélération ck; la courbe (v, cx) est, vers le point S, une parabole.

c) Lorsque les courbures au point S $(v = 0)$ et au point Ω $(v = \infty)$ sont opposées, les courbes présentent un point d'inflexion, ou un nombre impair de ces points. Si elles ont des courbures de même sens aux points S et Ω elles présentent zéro ou un nombre pair de points d'inflexion. Dans tous les cas ces points correspondent aux racines de l'équation :

$$F(v) - vF'(v) = 0$$

qui annule la dérivée seconde $\frac{cd^2x}{dv^2}$.

Ce sont les points où la fonction $F(v)$ devient proportionnelle à la simple vitesse.

54. **Fonction D(v).** — Les courbes précédentes représentent la fonction $\mathbf{D}(v)$ dont la définition est

$$\mathbf{D}(v) = -\int_V^v \frac{vdv}{F(v)}.$$

Si la courbe est finie dans un sens ou dans l'autre, on peut prendre pour vitesse V, origine de la table, soit $V = 0$, soit $v = \infty$ suivant le cas. Mais dans le cas où $n \leqq 2$ et $n' \geqq 2$, on ne peut prendre le point de départ des tables à ces extrémités naturelles et on choisit arbitrairement une vitesse V, pour laquelle on donne une valeur arbitraire à la fonction **D**. La soustraction qu'indique l'opération :

$$cx = \mathbf{D}(v) - \mathbf{D}(V_0)$$

fait disparaître et l'arbitraire de la vitesse V et l'arbitraire de la valeur initiale de la fonction $\mathbf{D}(V)$.

55. **Courbe (v, ct)**. — La courbe des temps *ct* en fonction des vitesses, c'est-à-dire la fonction $\mathbf{S}(v)$ se discutera d'une manière analogue. On trouve les types de courbes suivantes :

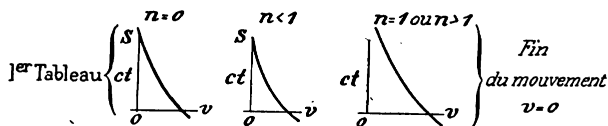


Fig. 25.

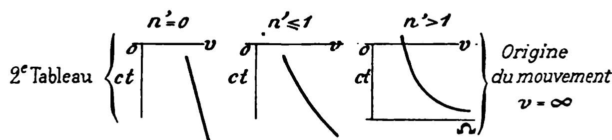


Fig. 26.

56. **Cas de F(v) = $B_n v^n$**. — Dans le cas d'une résistance F(v) proportionnelle à une puissance n de la vitesse, les deux intégrales $\mathbf{S}(v)$ et $\mathbf{D}(v)$ s'expriment aisément au moyen de fonctions connues.

On a en effet :

$$\mathbf{S}(v) = -\int_V^v \frac{dv}{F(v)} = -\int_V^v \frac{dv}{B_n v^n} = \frac{1}{B_n}\,\frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{v^{n-1}} - \frac{1}{V^{n-1}}\right]$$

et

$$\mathbf{D}(v) = -\int_V^v \frac{v\,dv}{F(v)} = -\int_V^v \frac{dv}{B_n v^{n-1}} = \frac{1}{B_n}\,\frac{1}{n-2}\left[\frac{1}{v^{n-2}} - \frac{1}{V^{n-2}}\right]$$

V est une vitesse quelconque, qui peut, dans ces formules explicites, être la vitesse V_0 elle-même.

On peut, au moyen de ces formules générales, établir les formules particulières suivantes, où on a donné à n diverses valeurs.

n	$b_n t$	$b_n x$
0	$V_0 - v$	$\frac{1}{2}\left(V_0^2 - v^2\right)$
1	$\text{Log}\,\frac{V_0}{v}$	$V_0 - v$
2	$\frac{1}{v} - \frac{1}{V_0}$	$\text{Log}\,\frac{V_0}{v}$
3	$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{v^2} - \frac{1}{V_0^2}\right]$	$\frac{1}{v} - \frac{1}{V_0}$
4	$\frac{1}{3}\left[\frac{1}{v^3} - \frac{1}{V_0^3}\right]$	$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{v^2} - \frac{1}{V_0^2}\right]$
. . . . .	. . . .	. . . .
n	$\frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{v^{n-1}} - \frac{1}{V_0^{n-1}}\right]$	$\frac{1}{n-2}\left[\frac{1}{v^{n-2}} - \frac{1}{V_0^{n-2}}\right]$

La notation b_n est mise pour cB_n.

Espace en fonction du temps. — Dans les formules du cas de $F(v) = B_n v^n$ qui donnent t et x, il est très aisé d'éliminer la vitesse v et d'obtenir une formule générale entre les deux variables x et t. C'est la relation :

$$\left[\frac{1}{V_0^{n-1}} + (n-1)\, b_n t\right]^{\frac{1}{n-1}} = \left[\frac{1}{V_0^{n-2}} + (n-2)\, b_n x\right]^{\frac{1}{n-2}}$$

Pour diverses valeurs de n, on obtient les équations suivantes :

n	$f(x,t)$
0	$x = V_0 t - \frac{1}{2} b_0 t^2$
1	$\frac{V_0}{V_0 - b_1 x} = e^{b_1 t}$
2	$V_0 \left(b_2 t + \frac{1}{V_0}\right) = e^{b_2 x}$
3	$t = \frac{x}{V_0} + \frac{1}{2} b_3 x^2$
4	$\frac{6}{V_0^3} t + 9 b_4 t^2 = \frac{6}{V_0^4} x + \frac{12}{V_0^2} b_4 x^2 + 8 b_4^2 x^3.$
...	....

57. **Développement en série.** — Dans le problème du mouvement rectiligne horizontal, figurent 3 variables, la vitesse v, l'espace parcouru x, le temps t.

On peut prendre pour variable indépendante l'une quelconque d'entre elles. Mais si dans le cas de $F(v) = B_n v^n$ le problème est soluble par des formules explicites, il n'en est pas de même dans le cas de $F(v)$ quelconque : x et t s'expriment facilement en fonction de v par le moyen des fonctions $\mathbf{D}(v)$ et $\mathbf{S}(v)$, mais on ne peut donner par exemple la relation $f(x, t)$ parce qu'entre les deux fonctions $\mathbf{D}$ et $\mathbf{S}$ on ne peut éliminer la variable v.

On est alors obligé de recourir à un développement en série. Il existe 6 développements, chacune des 3 lettres v,t,x pouvant être associée aux deux autres.

Soit ζ un élément quelconque dont on veut le développement par rapport à un autre ξ. On posera $\xi = \xi_0 - (\xi_0 - \xi)$ et la formule de Mac Laurin donne immédiatement la série :

$$\zeta = \zeta_0 - (\xi_0 - \xi)\left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)_0 + \frac{(\xi_0 - \xi)^2}{1.2}\left(\frac{d^2\zeta}{d\xi^2}\right)_0 - \frac{(\xi_0 - \xi)^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3\zeta}{d\xi^3}\right)_0 + \cdots$$

On trouve aisément les dérivées successives suivantes pour les variables x et t :

$$\frac{dx}{dt} = v \qquad\qquad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{v}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\,cF \qquad\qquad \frac{d^2t}{dx^2} = \frac{cF}{v^3}$$

$$\frac{d^3x}{dt^3} = +\,c^2FF' \qquad\qquad \frac{d^3t}{dx^3} = -\,\frac{c^2F}{v^5}\left(vF' - 3F\right)$$

$$\frac{d^4x}{dt^4} = -\,c^3F(F'^2 + FF'') \qquad\qquad \frac{d^4t}{dx^4} = \frac{c^3F}{v^7}\Big[v^2FF'' + vF'(vF' - 10F) + 15F^2\Big]$$

Et par suite on aura les deux séries suivantes :

$$1)\quad x = V_0t - cF_0\frac{t^2}{1.2} + c^2F_0F'_0\,\frac{t^3}{1.2.3} - c^3F_0\left(F_0'^2 + F_0F''_0\right)\frac{t^4}{1.2.3.4} + \cdots$$

$$2)\quad t = \frac{1}{V_0}x + \frac{cF_0}{V_0^3}\,\frac{x^2}{1.2} - \frac{c^2F_0}{V_0^5}\left(V_0F'_0 - 3F_0\right)\frac{x^3}{1.2.3} - \frac{c^3F_0}{V_0^7}\begin{bmatrix} + V_0^2F_0F''_0 \\ + V_0F'_0(V_0F'_0 - 10F_0) \\ + 15F_0^2 \end{bmatrix}\frac{x^4}{1.2.3.4} + \cdots$$

Dans le cas de $F(v) = B_nv^n$, ces formules deviennent :

$$1')\quad x = V_0t - b_nV_0^n\,\frac{t^2}{1.2} + nb_n^2V_0^{2n-1}\,\frac{t^3}{1.2.3} - n(2n-1)\,b_n^3V_0^{3n-2}\,\frac{t^4}{1.2.3.4} + \cdots$$

$$2')\quad t = \frac{1}{V_0}x + b_nV_0^{n-3}\,\frac{x^2}{1.2} - (n-3)\,b_n^2V_0^{2n-5}\,\frac{x^3}{1.2.3} + (n-3)(2n-5)\,b_n^2V_0^{3n-7}\,\frac{x^4}{1.2.3.4} + \cdots$$

On vérifie que pour $n = 0$, la première de ces formules et pour $n = 3$ la deuxième, coïncident avec les formules, données au n° 56.

58. **Exercices :**

1° Établir les quatre autres développements en série de la théorie du tir rectiligne horizontal, à savoir ceux qui renferment la vitesse v comme variable ou comme inconnue.

$$v = V_0 - \frac{cF_0}{V_0}x + \frac{c^2F_0}{V_0^3}(V_0F'_0 - F_0)\frac{x^2}{1.2} - \frac{c^3F_0}{V_0^5}\left[\begin{array}{l} + V_0^2F_0F''_0 \\ + V_0F'_0(V_0F'_0 - 3F_0) \\ + 3F_0^2 \end{array}\right]\frac{x^3}{1.2.3} + \cdots$$

$$x = \frac{V_0}{cF_0}(V_0 - v) - \frac{1}{c}\frac{F_0 - V_0F'_0}{F_0^2}\frac{(V_0 - v)^2}{1.2} - \frac{1}{c}F_0^3\left[\begin{array}{l} + V_0F_0F''_0 \\ - 2V_0F'^2_0 \\ + 2F_0F'_0 \end{array}\right]\frac{(V_0 - v)^3}{1.2.3} + \cdots$$

$$v = V_0 - cF_0t + c^2F_0F'_0\frac{t^2}{1.2} - c^3F_0(F'^2_0 + F_0F''_0)\frac{t^3}{1.2.3} + \cdots$$

$$t = \frac{1}{cF_0}(V_0 - v) + \frac{1}{c}\frac{F'_0}{F_0^2}\frac{(V_0 - v)^2}{1.2} - \frac{1}{c}\frac{(F''_0F_0 - 2F'^2_0)}{F_0^3}\frac{(V_0 - v)^3}{1.2.3} + \cdots$$

2° Appliquer au cas de $F(v) = B_n v^n$, et arriver aux formules suivantes :

$$v = V_0 - b_nV_0^{n-1}x + \frac{n-1}{1.2}b_n^2V_0^{2n-3}x^2 + \frac{3 + 2n(n-2)}{1.2.3}b_n^3V_0^{3n-5}x^3 + \cdots$$

$$x = \frac{V_0 - v}{b_nV_0^{n-1}}\left[1 + \frac{n-1}{2}\frac{(V_0 - v)}{V_0} + \frac{n(n-1)}{1.2.3}\frac{(V_0 - v)^2}{V_0^2} + \cdots\right]$$

$$v = V_0 - b_nV_0^nt + \frac{n}{1.2}b_n^2V_0^{2n-2}t^2 - \frac{n(2n+1)}{1.2.3}b_n^3V_0^{3n-2}t^3 + \cdots$$

$$t = \frac{V_0 - v}{b_nV_0^n}\left[1 + \frac{n}{1.2}\frac{V_0 - v}{V_0} + \frac{n(n+1)}{1.2.3}\frac{(V_0 - v)^2}{V_0^2} + \cdots\right]$$

3° Déduire les formules 4) et 6) des équations $cx = \mathbf{D} - \mathbf{D}_0$ et $ct = \mathbf{S} - \mathbf{S}_0$ en développant les fonctions balistiques **D** et **S**. [On pose $v = V_0 - (V_0 - v)$ et on applique aux fonctions **D** et **S** le développement de Taylor avec $V_0 - v$ comme argument.]

4° Déduire les formules 4') et 6') des formules du n° 56 en posant $v = V_0 - (V_0 - v)$ et appliquant la formule du binôme.

5° Toutes les fonctions ne sont pas d'un degré qu'on puisse déterminer comme il a été dit précédemment (51); il est des fonctions pour lesquelles la limite $v^{-n}F(v)$, quand v converge vers l'infini, est toujours nulle ou infinie, quelle que soit la valeur de n que l'on veuille adopter (de Saint-Robert).

Telles sont les fonctions $A \operatorname{Log} v$, Ae^{mv}, etc.

1° Démontrer que si $F(v) = A \operatorname{Log} v$, on a toujours $t_\infty = \infty$ et $x_\infty = \infty$, pour $v = \infty$.

2° Démontrer que si $F(v) = Ae^{mv}$, on a toujours t_∞ et x_∞ finis pour $v = \infty$ et que de plus, la trajectoire tout entière de $v = \infty$ à $v = 0$ est finie.

6° *Formules différentielles du mouvement rectiligne horizontal.*

$$c\partial x + x\partial c = -\frac{v\partial v}{F} + \frac{V_0 \partial V_0}{F_0}$$

$$c\partial t + t\partial c = -\frac{\partial v}{F} + \frac{\partial V_0}{F_0}$$

Si x est connu, par exemple, les variations ∂v et ∂t des deux autres variables sont données en fonction de ∂c et ∂V_0 par les formules.

$$\frac{v\partial v}{F} = \frac{V_0 \partial V_0}{F_0} - x\partial c$$

$$c\partial t = \frac{\partial V_0}{F_0}\left(1 - \frac{V_0}{v}\right) + \left(\frac{x}{v} - t\right)\partial c$$

Démontrer que le facteur $\frac{x}{v} - t$ est toujours positif.

7° Mouvement rectiligne d'un point matériel non pesant soumis à une résistance exprimée par la formule

$$R = K(e^{mv} - 1)$$

(Formule proposée par M. Page, *Revue d'artillerie.*)

CHAPITRE III

MOUVEMENT VERTICAL DANS UN MILIEU RÉSISTANT

§ 1. — Mouvement vertical ascendant

59. **Mouvement dans le vide.** — Soit O l'origine du mouvement et OY la verticale que décrit le projectile lancé du point O avec la vitesse V_0. L'espace y parcouru sera compté positivement de bas en haut, c'est-à-dire dans le sens du mouvement.

L'équation différentielle du mouvement étant :

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g$$

on aura

$$\frac{dv}{dt} = -g.$$

On en déduira facilement, entre les trois variables y, v et t, les trois équations suivantes :

$$v = V_0 - gt\,; \qquad y = V_0 t - \frac{1}{2} gt^2\,; \qquad y = \frac{V_0^2 - v^2}{2g}.$$

Le projectile monte jusqu'au *sommet* T_s, Y_s où on a

$$V_s = 0\,; \qquad T_s = \frac{V_0}{g}\,; \qquad Y_s = \frac{V_0^2}{2g}.$$

On a encore : $Y_s = \frac{gT_s^2}{2}$.

L'expression de t en fonction de y est la suivante :

$$t = \frac{V_0 - \sqrt{V_0^2 - 2gy}}{g}.$$

60. **Mouvement vertical ascendant dans l'air**. — La résistance de l'air représentée par la fonction $F(v)$ s'opposant toujours au mouvement, on aura comme équation différentielle du mouvement *ascendant :*

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -cF(v) - g.$$

y est ainsi compté positivement de bas en haut, dans le sens du mouvement.

Comme on a $v = \frac{dy}{dt}$, on pourra intégrer et obtenir le temps t par la formule suivante :

$$ct = -\int_{V_0}^{v} \frac{dv}{F(v) + \frac{g}{c}}.$$

L'intégrale est prise à partir de la vitesse initiale V_0, pour laquelle on suppose $t = 0$.

On aura ensuite pour la hauteur y, entre les mêmes limites et avec l'hypothèse $y = 0$ pour $v = V_0$:

$$cy = -\int_{V_0}^{v} \frac{vdv}{F(v) + \frac{g}{c}}.$$

Ces deux intégrales sont la généralisation des fonctions $\mathbf{S}(v)$ et $\mathbf{D}(v)$ trouvées précédemment (48), auxquelles elles se réduisent d'ailleurs pour $g = 0$.

Comme on peut les écrire :

$$gt = -\int_{V_0}^{v} \frac{dv}{\frac{cF(v)}{g} + 1}; \quad gy = -\int_{V_0}^{v} \frac{vdv}{\frac{cF(v)}{g} + 1}$$

elles sont également la généralisation des formules du vide du n° 59 auxquelles elles se réduisent si on fait $cF(v) = 0$.

Posons :

$$\Sigma_0^v = \int_0^v \frac{dv}{F(v) + \frac{g}{c}}; \quad \Delta_0^v = \int_0^v \frac{vdv}{F(v) + \frac{g}{c}}$$

On aura :

$$ct = \Sigma_0^{V_0} - \Sigma_0^v; \qquad cy = \Delta_0^{V_0} - \Delta_0^v$$

Moyennant le calcul fait une fois pour toutes des tables des fonctions Σ_0^v et Δ_0^v en partant de la fonction $\mathbf{F}(v)$ expérimentale, on aura la possibilité de résoudre numériquement les problèmes du *tir vertical de bas en haut*. Ces tables sont à double entrée et auront pour arguments v et $\frac{g}{c}$.

A la valeur $\frac{g}{c} = 0$ de cette table, correspondent les fonctions $\mathbf{S}(v)$ et $\mathbf{D}(v)$ de la théorie du tir horizontal. Pour la valeur $\frac{g}{c} = \infty$, les fonctions Σ et Δ sont infi-

nies ; mais cette condition exige que $c = 0$. On se trouve donc dans le cas du vide et les vraies valeurs des intégrales sont $t = \frac{1}{g}(V_0 - v)$ et $y = \frac{1}{2g}(V_0^2 - v^2)$ ainsi qu'on le reconnaît par la deuxième forme sous laquelle on les a mises.

61. **Discussion du mouvement vertical ascendant.** — D'après l'équation différentielle

$$\frac{dv}{dt} = -g - cF(v),$$

la dérivée $\frac{dv}{dt}$ est constamment négative ; la vitesse décroît constamment : elle s'annule au point culminant, où on a

$$cT_s = \Sigma_0^{V_0} \quad \text{et} \quad cY_s = \Delta_0^{V_0}.$$

Si la vitesse initiale V_0 est finie, le dénominateur des fonctions Σ et Δ ne devient jamais infini ; donc T_s et Y_s sont finis. Mais si la vitesse initiale est infinie, la résistance $cF(v)$ qui devient infinie en même temps que v, est infiniment grande par rapport à la gravité g, de sorte que, pour la recherche des valeurs limites, les fonctions Σ et Δ se confondent avec les fonctions $\mathbf{S}$ et $\mathbf{D}$. Le temps et l'altitude, dans le cas d'une vitesse initiale infinie, seront donc finis ou infinis dans les mêmes conditions que le temps et le chemin parcouru l'étaient dans le mouvement horizontal (51).

« Il en résulte que si la résistance de l'air suit une « loi d'un degré supérieur au carré de la vitesse, il « pourrait, suivant la grandeur du coefficient balistique,

« y avoir, entre les bornes mêmes de l'atmosphère ter-
« restre, une hauteur limite au delà de laquelle nos
« armes à feu ne pourraient plus lancer de projectiles,
« tout en admettant des moyens de projection très puis-
« sants et même capables d'imprimer au projectile une
« vitesse initiale infinie » (de Saint-Robert, t. I, p. 54.)

« A l'instant où $v = 0$, la résistance, en vertu de sa
« nature cesse d'agir et le mobile qui n'est plus sollicité
« que par la pesanteur tend à descendre, et descendra
« effectivement si la résistance qui reprend son action
« dans le sens opposé, peut être vaincue par le poids
« relatif du mobile.

« Arrivé donc à sa plus grande hauteur, le mobile
« retombera si $cF(v)$ qui exprime la résistance, acquiert
« pour $v = 0$, une valeur inférieure à g ; il s'arrêtera
« au contraire si pour $v = 0$ elle prend une valeur $\geqq g$. »
(*loc. cit.*, p. 51.)

Ce dernier cas ne peut se produire évidemment que si $F(v)$ contient un terme indépendant de v, donnant naissance à une résistance de frottement. La suspension presque indéfinie dans l'air des corpuscules très légers s'explique par le fait de la grandeur du coefficient balistique c de ces objets, et de la présence dans $F(v)$ d'un terme de frottement de l'air, aussi petit qu'on voudra si c est suffisamment grand, c'est-à-dire si le poids de l'objet est suffisamment petit.

62. **Courbe (v, cy) du mouvement ascendant.** — Représentons graphiquement le mouvement ascendant, en prenant pour abscisse la *vitesse* v et pour ordonnée l'*espace* cy ; v peut varier de ∞ à zéro.

Le projectile part du point A où $v = V_0$ et monte

jusqu'au sommet S où l'altitude est cY_s. Cette altitude sera toujours finie.

La tangente au point S que détermine l'équation :

$$\frac{cdy}{dv} = -\frac{v}{F(v) + \frac{g}{c}}$$

sera toujours horizontale.

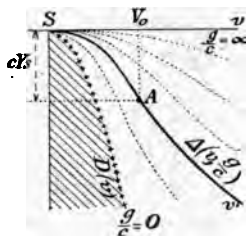


Fig. 27.

Le point Ω de la courbe, en amont du point A, qui correspond à la vitesse $v = \infty$ jouit des mêmes propriétés que le point Ω de la courbe (v, cx) considéré précédemment (53). C'est la fonction **D**(∞) qui en règle les propriétés, $\frac{g}{c}$ devenant négligeable devant $F(v)$. Les formes possibles de courbes seront celles du second tableau du nº 53 et dépendront de l'exposant final n'.

Toutes les courbes **Δ** $\left(v, \frac{g}{c}\right)$ qui correspondent à des valeurs de $\frac{g}{c}$ différentes, peuvent donc être prises avec une même origine S.

A la valeur $\frac{g}{c} = 0$ correspond la courbe **D** (v) ; pour des valeurs de $\frac{g}{c}$ croissant jusqu'à l'infini (cas du vide) les courbes **Δ** forment un réseau qui recouvre tout le plan entre la courbe **D** et l'axe des abscisses et qui représente graphiquement la table à double entrée $\left(v, \frac{g}{c}\right)$ de la fonction cy.

Mais lorsque la fonction **D**(v), pour $v = 0$, prend

une valeur infinie $[n \geqq 2\,(53)]$, cette circonstance se traduira sur le graphique par la coïncidence de la courbe $D(v)$ et de l'axe des cy. Si on voulait, même dans ce cas, avoir une table unique des fonctions **D** et **Δ**, il faudrait (comme au n° 48) prendre pour origine une valeur arbitraire V de la vitesse à partir de laquelle on évaluerait les intégrales, définies alors par le symbole

$$\Delta = -\int_V^v \frac{v\,dv}{F(v) + \frac{g}{c}}.$$

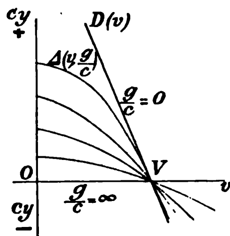


Fig. 28.

Le graphique de la table **Δ** à double entrée serait alors celui qui est représenté sur la figure ci-contre.

Les points d'inflexion des courbes (v, cy) sont définis par l'annulation de la dérivée seconde :

$$\frac{c\,d^2y}{dv^2} = -\frac{vF'(v) - \frac{g}{c} - F(v)}{\left[F(v) + \frac{g}{c}\right]^2}$$

d'où :

$$vF'(v) - F(v) = \frac{g}{c}.$$

Si $F(v) = B_n v^n$, on aura pour la vitesse d'inflexion :

$$v^n = \frac{1}{n-1}\,\frac{g}{cB_n}.$$

63. **Exercice**. — Au lieu de considérer les fonctions

$cy = \Delta$ et $ct = \Sigma$, on pourrait considérer les fonctions

$$gy = \int_v^0 \frac{vdv}{\frac{cF}{g} + 1} \quad \text{et} \quad gt = -\int_v^0 \frac{dv}{\frac{cF}{g} + 1}.$$

Étudier et discuter les courbes et les tables à double entrée qui leur correspondent.

§ 2. — Mouvement vertical descendant

64. **Mouvement dans le vide**. — On prendra la verticale dirigée de haut en bas pour axe positif des y, c'est-à-dire dans le sens du mouvement : la vitesse initiale est V_0.

L'équation différentielle étant alors :

$$\frac{d^2y}{dt^2} = g,$$

on en déduira les trois équations :

$$v = V_0 + gt; \quad y = V_0 t + \frac{1}{2} gt^2; \quad y = \frac{v^2 - V_0^2}{2g}.$$

Les trois variables t, v et y croissent sans limite.

En fonction de yt, s'exprime par la formule :

$$t = \frac{-V_0 + \sqrt{V_0^2 - 2gy}}{g}.$$

65. **Mouvement vertical descendant dans l'air**. — Adoptant la même convention que dans le vide, c'est-à-dire comptant les y *positivement* vers le

bas, dans le sens du mouvement, l'équation différentielle s'écrira :

$$\frac{dv}{dt} = - cF(v) + g.$$

Le second membre est formé de deux termes, l'*accélération* de la pesanteur g, qui tend à augmenter la vitesse, et la *résistance de l'air* $cF(v)$ qui tend à la diminuer.

Intégrant, comme au n° 60, on arrivera aux équations :

$$ct = \mathfrak{Z}_V^{v_0} - \mathfrak{Z}_V^{v}; \qquad cy = \mathfrak{V}_V^{v_0} - \mathfrak{V}_V^{v}$$

en posant :

$$\mathfrak{Z}_V^{v} = \int_V^v \frac{dv}{F(v) - \frac{g}{c}}; \qquad \mathfrak{V}_V^{v} = \int_V^v \frac{vdv}{F(v) - \frac{g}{c}}$$

V étant une vitesse arbitraire quelconque.

Des tables à double entrée $\left(v, \frac{g}{c}\right)$ de ces deux fonctions permettraient de résoudre les problèmes du tir vertical de haut en bas. Elles seraient calculées avec la fonction $F(v)$ expérimentale.

On peut encore faire l'intégration sous la forme :

$$gt = \int_{V_0}^{v} \frac{dv}{\frac{cF(v)}{g} - 1} \quad \text{et} \quad gx = \int_{V_0}^{v} \frac{vdv}{\frac{cF(v)}{g} - 1}$$

66. **Théorème**. — *La vitesse v acquise par le projectile tend vers une limite finie.*

En effet, si v tendait vers l'infini, il en serait de même de la fonction $cF(v)$. Il arriverait donc un moment où on aurait $cF(v) > g$, c'est-à-dire que $\frac{dv}{dt}$ serait négatif; la vitesse v décroîtrait alors, sa dérivée étant négative.

Il n'est donc pas possible que v tende vers l'infini, à moins naturellement que $c = 0$ (cas du vide).

67. Discussion du mouvement vertical descendant. — Trois cas sont à distinguer :

Premier cas. — La vitesse initiale V_0 *est telle que* $cF(V_0) < g$.

Le second membre de l'équation

$$\frac{dv}{dt} = - cF(v) + g$$

sera positif à l'origine du mouvement et la vitesse v croîtra jusqu'à ce que la dérivée $\frac{dv}{dt}$ s'annule, ce qui aura lieu lorsque la vitesse sera devenue égale à une certaine vitesse v'.

Il est facile de démontrer que la vitesse v ne deviendra égale à v' qu'au bout d'un *temps infini* et après un *parcours infini*. Posons, en effet, au voisinage de la vitesse maximum v', l'identité $v = v' - (v' - v)$: $(v' - v)$ est, par hypothèse, une petite quantité.

On écrira :

$$ct = \int_{V_0}^{v} \frac{d(v' - v)}{F[v' - (v' - v)] - \frac{g}{c}}$$

Le point v' étant un point quelconque de la fonction $F(v)$, celle-ci sera développable autour de ce point par la formule de Taylor; si on la réduit à ses deux premiers termes, $F(v')$ disparaît comme égal à $\frac{g}{c}$ et il reste :

$$ct = -\frac{1}{F'(v')}\int_{V_0}^{v}\frac{d(v'-v)}{v'-v} = \frac{1}{F'(v')}\,\text{Log}\,\frac{v'-V_0}{v'-v}$$

Quand v tend vers v', le second membre tend vers ∞; t devient donc infini. Une démonstration tout à fait analogue s'appliquerait à y.

On désigne la vitesse v' sous le nom de *vitesse terminale*[1]. C'est la vitesse qui correspond à l'équilibre du corps, accéléré d'une part par son poids, retardé d'autre part par la résistance de l'air. Elle est définie par l'équation $cF(v') = g$.

On remarquera que ce premier cas suppose qu'on puisse poser $cF(V_0) < g$ et que, par suite, la vitesse V_0 peut être choisie assez petite pour que cette inégalité soit satisfaite.

Deuxième cas. — La vitesse initiale V_0 *est telle que* $cF(V_0) > g$.

Dans cette hypothèse, qui, au contraire de la première, est toujours réalisable, $\frac{dv}{dt}$ est d'abord négatif; la vitesse

[1] « Un corps en tombant à travers l'air, augmente continuellement sa « vitesse, mais toutefois en sorte qu'il n'en peut jamais excéder ni même « atteindre un certain degré : qui est la vitesse qu'il faudrait à l'air souf- « fler de bas en haut, pour tenir le corps suspendu sans pouvoir des- « cendre; car alors la force de l'air contre ce corps égale sa pesanteur. « J'appelle cette vitesse, pour chaque corps, la *vitesse terminale*. » Discours de la cause de la pesanteur par Huyghens, cité par de Saint-Robert, tome I, page 66.

décroît. Un raisonnement calqué sur le précédent fait voir que la vitesse continue à décroître jusqu'à ce qu'elle atteigne la valeur v' de la *vitesse terminale* telle que $cF(v') = g$. Cette valeur n'est d'ailleurs atteinte qu'au bout d'un temps infini et pour un parcours infini.

La *vitesse terminale* v' peut être nulle; cela arrivera si la fonction $F(v)$ renferme un terme constant a indépendant de la vitesse et tel que $ca > g$. Mais dans ce cas ni le *temps*, ni l'*espace parcouru* ne deviendront infinis quand le projectile s'arrêtera. On pourra en effet écrire l'équation du mouvement :

$$\frac{dv}{dt} = -(ca - g) - c\psi(v),$$

de sorte que si $ca > g$ on se trouve dans le cas des équations du mouvement *ascendant*, la gravité g étant remplacée par $ca - g$.

Le projectile s'arrêtera donc, la résistance de frottement du milieu étant supérieure au poids. Si ce projectile avait été lancé de bas en haut on aurait eu pour équation :

$$\frac{dv}{dt} = -(ca + g) - c\psi(v);$$

arrivé au haut de sa course, il ne serait pas retombé (61).

Troisième cas. — La vitesse initiale V_0 *est telle que* $cF(V_0) = g$.

Dans ce cas, le mouvement descendant est rigoureusement uniforme et l'équation $\frac{dv}{dt} = -cF(v) + g$ se trouve à chaque instant satisfaite.

68. **Courbes (v,cy) du mouvement descendant.** — *Premier cas. — La vitesse initiale est plus petite que* v' $[cF(V_0) < g]$.

Prenons toujours les v comme abscisses et les cy comme ordonnées. La vitesse v peut varier de o à la vitesse terminale v'.

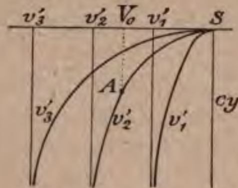


Fig. 29.

Les courbes (v,cy) ont pour équation

$$cy = -\int_{V_0}^{0} \frac{vdv}{F(v) - \frac{g}{c}}$$

qui peut s'écrire encore

$$cy = -\int_{V_0}^{0} \frac{vdv}{F(v) - F(v')}$$

La tangente au point $v = 0$ est horizontale. On peut donc prendre dans la définition de la fonction ∇^v, la vitesse arbitraire V égale à zéro et donner le même point S comme origine à toutes les courbes représentatives des fonctions ∇. Chacune de celles-ci est distinguée par une certaine valeur v' et elle admet pour asymptote une verticale située à la distance v' de l'origine.

Ce réseau de courbes complète le réseau de la première figure du n° 62. Leur réunion permet de résoudre complètement le problème du mouvement d'un corps qu'on lance de bas en haut et qui, après avoir atteint le point culminant S retombe de haut en bas.

Ainsi, si on demandait avec quelle vitesse v, un corps

lancé avec une vitesse initiale V_0 de bas en haut retomberait au même point, on écrirait l'égalité des deux fonctions Δ et ∇ de la manière suivante $\Delta_0^{V_0} = \nabla_v^0$.

Cette relation associe un point v d'une courbe v' descendante au point V_0 de la courbe v' montante ; celle-ci peut être désignée en effet par $\Delta(v, v')$ au lieu de $\Delta\left(v, \frac{c}{g}\right)$. On peut remarquer que les fonctions Δ ou ∇ considérées comme fonctions de la variable v et de l'invariant v', restent les mêmes quand on permute les lettres v et v'.

Deuxième cas. — La vitesse initiale est plus grande que $v'[cF(V_0) > g]$.

Ici (hors un cas particulier), on sera obligé de prendre pour limite supérieure de l'intégrale ∇ une vitesse arbitraire V. Mais on ne pourra représenter et calculer que les fonctions ∇ correspondant à des valeurs de v' inférieures à V : le graphique se présentera de la manière ci-contre.

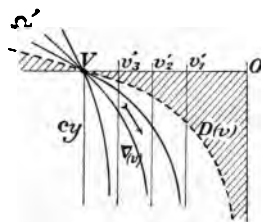


Fig. 30.

La fonction $D(v)$ correspondant à $v' = 0$ limitera le réseau de ces courbes ∇.

En amont du point V, les courbes ∇ ont pour les vitesses infinies les mêmes propriétés que la fonction $D(\infty)$. Les propriétés au point Ω' à l'infini des courbes ∇ sont donc celles des courbes Δ du n° 62 au point Ω, et des courbes D du n° 53.

Si, en particulier, on suppose que le point Ω' est à distance finie, il sera possible de reporter au point $v = \infty$ au lieu de $v = V$, l'origine commune des courbes ∇ et

la table de ces fonctions pourra alors renfermer l'ensemble complet de ces courbes.

69. **Résumé du mouvement vertical ascendant et descendant.** — D'après ce qui précède, si on considère le mouvement d'un projectile déterminé (v' donné), il pourra être étudié de la manière suivante par la considération des courbes (v, cy).

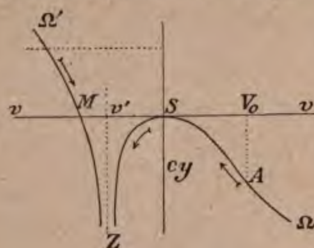


Fig. 31.

La branche ΩS correspond au mouvement *ascendant*. La vitesse diminue depuis ∞ jusqu'à o (point S culminant); le mouvement est réglé par l'intégrale Δ_0^v.

La branche SZ correspond au mouvement *descendant* pour des vitesses $V_0 < v'$. La vitesse peut y augmenter depuis o (point culminant) jusqu'à v'. Le mouvement est réglé par l'intégrale ∇_0^v.

La branche Ω'Z correspond au mouvement *descendant* pour des vitesses $V_0 > v'$. La vitesse diminue depuis ∞ (point Ω') jusqu'à v'. Le mouvement est réglé par l'intégrale ∇_v^0. Les positions relatives de la branche Ω'Z et de la branche SZ ne sont déterminables que lorsque, pour $v = \infty$, le point Ω' est à distance finie. La distance SM peut alors se calculer exactement.

La branche SZ peut être absente et la branche Ω'Z avoir du côté des Z une étendue finie dans le cas d'une résistance

$$F(v) = a + \psi(v), \qquad \text{si} \qquad ca > g.$$

70. **Courbe (v, ct).** — On la discutera d'une manière analogue à la courbe (v, cy).

La courbe (v, ct) répond à l'équation :

$$ct = -\int_{V_0}^{v} \frac{dv}{F(v) + \frac{g}{c}}$$

sur la branche ascendante ΩS et à l'équation

$$ct = -\int_{V_0}^{v} \frac{dv}{F(v) - \frac{g}{c}}$$

sur les deux autres branches $\begin{cases} SZ \text{ où } V_0 < v' \\ Z'\Omega' \text{ où } V_0 > v' \end{cases}$

La *tangente en* S a pour expression (si $F(o) = o$)

$$\frac{dt}{dv} = -\frac{1}{g}$$

Les *tangentes en* Ω *et* Ω′ sont réglées par les propriétés de la fonction $S(\infty)$ (55).

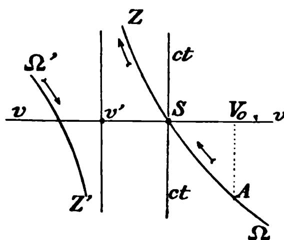


Fig. 32.

71. **Exercices.** — Étudier le mouvement descendant en considérant les fonctions

$$gt = -\int_{V_0}^{v} \frac{dv}{\frac{cF(v)}{g} - 1} \quad \text{et} \quad gy = -\int_{V_0}^{v} \frac{vdv}{\frac{cF(v)}{g} - 1}.$$

72. **Cas d'une résistance proportionnelle à une puissance de la vitesse.** — Soit $F(v) = B_n v^n$ la

résistance; posant $cB_n = b_n$, on aura les équations différentielles suivantes :

MOUVEMENT ASCENDANT	MOUVEMENT DESCENDANT
$gt = -\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{1 + \frac{b_n v^n}{g}}$	$gt = \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{1 - \frac{b_n v^n}{g}}$
$gy = -\int_{v_0}^{v} \frac{vdv}{1 + \frac{b_n v^n}{g}}$	$gy = \int_{v_0}^{v} \frac{vdv}{1 - \frac{b_n v^n}{g}}$

Ces équations sont intégrables pour toutes les valeurs entières de n, à condition qu'on puisse résoudre les équations binômes;

$$1 \pm \frac{b_n v^n}{g} = 0.$$

Soit v' la *vitesse terminale*, telle par conséquent que $\frac{b_n v'^n}{g} = 1$. En introduisant le rapport $\rho = \frac{v}{v'}$, dans les équations, on pourra les mettre sous la forme suivante :

$\frac{gt}{v'} = -\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{1 + \rho^n}$	$\frac{gt}{v'} = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{1 - \rho^n}$
$\frac{gy}{v'^2} = -\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\rho d\rho}{1 + \rho^n}$	$\frac{gy}{v'^2} = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\rho d\rho}{1 - \rho^n}$

Les seconds membres sont des quantités purement numériques, dont il serait aisé de calculer une fois pour toutes des tables, l'exposant n étant donné. On voit que dans ce cas particulier, *ces tables sont à simple entrée*, parce que le facteur v' sort du signe $\int$ où il ne figure plus que dans le rapport ρ pris comme variable indépendante.

73. Hauteur maximum atteinte par un projectile. — Soient T et Y le temps et la hauteur depuis $v = \infty$ jusqu'à $v = 0$ dans le mouvement ascendant et dans le cas d'une résistance $F(v) = B_n v^n$.

On aura :

$$\frac{g}{v'} T = \int_0^\infty \frac{d\rho}{1 + \rho^n}$$

$$\frac{g}{v'^2} Y = \int_0^\infty \frac{\rho d\rho}{1 + \rho^n} .$$

Posons $\rho = z^{\frac{1}{n}}$; d'où

$$d\rho = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n} - 1} dz$$

Il viendra :

$$\frac{ng}{v'} T = \int_0^\infty \frac{z^{\frac{1}{n} - 1}}{1 + z} dz ; \qquad \frac{ng}{v'^2} Y = \int_0^\infty \frac{z^{\frac{2}{n} - 1}}{1 + z} dz$$

Mais on peut démontrer que, a étant une constante positive et plus petite que 1, on a :

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1 + x} dx = \frac{\pi}{\sin a\pi} .$$

On aura donc :

$$\frac{ng}{v'} T = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{n}} \qquad \text{lorsque } n > 1 .$$

$$\frac{ng}{v'^2} Y = \frac{\pi}{\sin \frac{2\pi}{n}} \qquad \text{lorsque } n > 2 .$$

Dans le cas où $n \leqq 1$, le temps et dans le cas où $n \leqq 2$, l'espace, sont infinis (51).

74. **Cas de n = 1.** — On trouve aisément les formules suivantes, où

$$\rho = \frac{v}{v'} \qquad \text{et} \qquad b_1 v' = g.$$

Mouvement *ascendant*.	Mouvement *descendant*.
$\frac{gt}{v'} = \mathrm{Log}\,\frac{1+\rho_0}{1+\rho}$	$\frac{gt}{v'} = \mathrm{Log}\,\frac{1-\rho_0}{1-\rho}$
$\frac{gy}{v'^2} = \rho_0 - \rho - \mathrm{Log}\,\frac{1+\rho_0}{1+\rho}$	$\frac{gy}{v'^2} = \rho_0 - \rho + \mathrm{Log}\,\frac{1-\rho_0}{1-\rho}$

De ces équations, on peut déduire les relations entre y et t, qui sont les suivantes :

$$y = -v't + (V_0 + v')\frac{v'}{g}\left(1 - e^{-\frac{gt}{v'}}\right)$$

et

$$y = v't + (V_0 - v')\frac{v'}{g}\left(1 - e^{-\frac{gt}{v'}}\right)$$

Pour le sommet de la trajectoire, on fera $\rho = 0$, d'où :

$$T_s = \frac{v'}{g}\,\mathrm{Log}\left(1 + \frac{V_0}{v'}\right)$$

$$Y_s = \frac{v'V_0}{g} - \frac{v'^2}{g}\,\mathrm{Log}\left(1 + \frac{V_0}{v'}\right)$$

Exercices. — Discuter les courbes (v, ct), (v, cy), (y, t) du mouvement.

75. **Cas de n = 2.** — On trouve aisément les formules suivantes où

$$\rho = \frac{v}{v'} \qquad \text{et} \qquad b_2 v'^2 = g.$$

Mouvement *ascendant*.	Mouvement *descendant*.
$\frac{gt}{v'} = \mathrm{arc\,tg}\,\rho_0 - \mathrm{arc\,tg}\,\rho$	$\frac{gt}{v'} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,\frac{1+\rho}{1-\rho}\,\frac{1-\rho_0}{1+\rho_0}$
$\frac{gy}{v'^2} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,\frac{1+\rho_0^2}{1+\rho^2}$	$\frac{gy}{v'^2} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,\frac{1-\rho_0^2}{1-\rho^2}$

Les relations entre y et t sont les suivantes :

$$\frac{gy}{v'^2} = \frac{1}{2} \operatorname{Log} (1 + \rho_0^2) \cos^2 \left(\operatorname{arc\,tg} \rho_0 - \frac{gt}{v'}\right)$$

$$2 = (1 + \rho_0)^{\frac{g}{v'}\left(t - \frac{y}{v'}\right)} + (1 - \rho_0)^{-\frac{g}{v'}\left(t + \frac{y}{v'}\right)}.$$

Pour le sommet de la trajectoire, en faisant $\rho = 0$ on a :

$$T_s = \frac{v'}{g} \operatorname{arc\,tg} \frac{V_0}{v'}$$

$$Y_s = \frac{v'^2}{2g} \operatorname{Log} \frac{V_0^2 + v'^2}{v'^2}.$$

Exercices. — 1° Discuter les courbes (v, ct), (v, cy), (y, t) du mouvement.

2° Démontrer les formules.

$$v = v' \frac{v' \sin \frac{gt}{v'} - V_0 \cos \frac{gt}{v'}}{V_0 \sin \frac{gt}{v'} + v' \cos \frac{gt}{v'}} \qquad v = v' \frac{e^{\frac{gt}{v'}} - e^{-\frac{gt}{v'}}}{e^{\frac{gt}{v'}} + e^{-\frac{gt}{v'}}}$$

$$y = -\frac{v'^2}{g} \operatorname{Log}\left(\frac{V_0}{v'} \sin \frac{gt}{v'} + \cos \frac{gt}{v'}\right) \qquad y = \frac{v'^2}{g} \operatorname{Log} \frac{e^{\frac{gt}{v'}} + e^{-\frac{gt}{v'}}}{2}.$$

76. Exercices. — 1. Démontrer que dans le cas d'une résistance quadratique, l'espace parcouru pendant le mouvement ascendant peut se mettre sous la forme :

$$\frac{gy}{v'^2} = \operatorname{Log} \frac{\cos\left(\beta - \frac{gt}{v'}\right)}{\cos \beta} \qquad \text{avec } \operatorname{tg} \beta = \frac{V_0}{v'}$$

2. Soient a l'espace parcouru depuis le temps $t_1 - \theta$ jusqu'au temps t_1 et b l'espace parcouru depuis le temps t_1 jusqu'au temps $t_1 + \theta$, par un point pesant qui se meut verticalement dans l'air et est soumis à une résistance quadratique.

Démontrer que la somme

$$e^{\frac{gb}{v'^2}} + e^{-\frac{ga}{v'^2}}$$

est égale à une valeur constante quel que soit t_1 et quel que soit le sens du mouvement (M. d'Ocagne.)

3. Un point pesant, sans vitesse initiale, tombe dans l'air d'une hauteur h sur un plan horizontal qui le fait rebondir avec sa vitesse d'incidence ; on demande à quelle hauteur il s'élèvera après le n^e bond, la résistance de l'air étant quadratique ? (M. Walton.)

Soit h_p la hauteur à laquelle il s'élève après le n^e bond. Si l'on pose $e^{\frac{2gh_p}{v'^2}} = u_p$, on trouve la loi de récurrence :

$$\frac{1}{u_{p+1} - 1} = \frac{1}{u_p - 1} + 1$$

4. Formules du mouvement descendant et du mouvement ascendant dans le cas d'une résistance cubique. (de Saint-Germain.)

5. Mouvement rectiligne d'un point matériel pesant mobile avec frottement sur un plan incliné dans un milieu résistant.

6. Temps et espace pour arriver au point le plus haut (de $V_0 = \infty$ à $v = 0$) pour une fonction

$$F(v) = av^2(1 + bv) = Av^2 + Bv^3.$$

Rép.

$$\frac{2}{Q}(3g + AQ^2)T = \text{Log}\frac{g}{BQ^3} + \frac{2(3g + 2AQ^2)}{\sqrt{g(3g + 4AQ^2)}}\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{BQ^3}}\right)$$

$$\frac{2}{Q^2}(3g + AQ^2)Y = \text{Log}\frac{BQ^3}{g} + \frac{6g}{\sqrt{g(3g + 4AQ^2)}}\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{BQ^3}}\right)$$

où la valeur de Q se déduit de l'équation du 3e degré

$$BQ^3 - AQ - g = 0 \quad \text{(de Saint-Robert.)}$$

7. Même problème pour une fonction $F(v) = Ae^{mv}$ et pour le temps T.

$$T = \int_0^{\infty} \frac{dv}{g + Ae^{mv}}.$$

On trouve :

$$mgT = \text{Log}\left(1 + \frac{g}{A}\right).$$

(de Saint-Robert.)

§ 3. — Développements en séries

77. Développements en séries de Mac-Laurin. — Dans le problème du mouvement vertical figurent trois variables, la *vitesse v*, *l'espace parcouru y*, *le temps t*.

Comme au n° 57, on peut prendre pour argument du développement en série une quelconque de ces variables et les associant, obtenir ainsi 6 formules pour le mouvement ascendant et 6 formules pour le mouvement descendant.

Les calculs sont développés ci-dessous dans le cas du *mouvement ascendant* pour les deux variables y et t dont on obtiendra d'abord les dérivées successives.

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= v \,; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -(cF + g) \\ \frac{d^3y}{dt^3} &= c(cF + g)F' \\ \frac{d^4y}{dt^4} &= -c(cF + g)\left[cF'^2 + F''(cF + g)\right] \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dt}{dy} &= \frac{1}{v} \,; \quad \frac{d^2t}{dy^2} = \frac{cF + g}{v^3} \\ \frac{d^3t}{dy^3} &= -\frac{cF + g}{v^5}\left[cvF' - 3(cF + g)\right] \\ \frac{d^4t}{dy^4} &= \frac{cF + g}{v^7}\left[\begin{aligned} &+ c^2v^2F'^2 \\ &+ cv(cF + g)(vF'' - 10F') \\ &+ 15(cF + g)^2 \end{aligned}\right] \end{aligned}\right.$$

On aura ainsi les deux séries suivantes :

$$1)\quad y = V_0 t - (cF_0 + g)\frac{t^2}{1.2} + (cF_0 + g)\, cF'_0 \frac{t^3}{1.2.3} - (cF_0+g)\left[cF''_0 (cF_0 + g) + c^2F'^2_0\right]\frac{t^4}{1.2.3.4} + \cdots$$

$$2)\quad t = \frac{1}{V_0}y + \frac{cF_0+g}{V_0^3}\frac{y^2}{1.2} - \frac{cF_0+g}{V_0^5}\left[cV_0F'_0 - 3(cF_0+g)\right]\frac{y^3}{1.2.3} + \frac{cF_0+g}{V_0^7}\begin{bmatrix} +c^2V_0^2F'^2_0 \\ +cV_0(cF_0+g)(V_0F''_0 - 10F'_0) \\ +15(cF_0+g)^2 \end{bmatrix}\frac{y^4}{1.2.3.4} + \cdots$$

[* Si on y fait $g = 0$, on retrouve les formules qui donnent x et t dans le cas du mouvement *rectiligne horizontal* (57).

** Pour $c = 0$, la première donne $y = V_0 t - \frac{1}{2}gt^2$ (cas du vide) et la seconde

$$t = \frac{y}{V_0} + \frac{g}{V_0^3}\frac{y^2}{1.2} + \frac{3g^2}{V_0^5}\frac{y^3}{1.2.3} + \frac{15g^3}{V_0^7}\frac{y^4}{1.2.3.4} + \cdots$$

série qui n'est autre que le développement de la formule du vide (59) :

$$t = \frac{V_0 - \sqrt{V_0^2 - 2gy}}{g}$$

*** Pour le mouvement *descendant*, il suffira dans les formules ci-dessus de changer g en $-g$.]

Les quatre autres développements en série sont les suivants :

$$3)\quad v = V_0 - \frac{cF_0+g}{V_0}y + \frac{(cF_0+g)\left[cV_0F'_0 - (cF_0+g)\right]}{V_0^3}\frac{y^2}{1.2} - \frac{cF_0+g}{V_0^5}\begin{bmatrix} c^2V_0^2F'^2_0 \\ +cV_0(cF_0+g)(V_0F''_0 - 4F'_0) \\ -3(cF_0+g)^2 \end{bmatrix}\frac{y^3}{1.2.3} + \cdots$$

4) $$y = \frac{V_0}{cF_0 + g}(V_0 - v) - \frac{(cF_0 + g) - cV_0F'_0}{(cF_0 + g)^2}\frac{(V_0 - v)^2}{1.2}$$
$$- \frac{(cF_0 + g)(cV_0F''_0 + 2cF'_0) - 2c^2V_0F'^2_0}{(cF_0 + g)^3}\frac{(V_0 - v)^3}{1.2.3} + \dots$$

5) $$v = V_0 - (cF_0 + g)t + (cF_0 + g)cF'_0\frac{t^2}{1.2}$$
$$- (cF_0 + g)\left[cF''_0(cF_0 + g) + c^2F'^2_0\right]\frac{t^3}{1.2.3} + \dots$$

6) $$t = \frac{V_0 - v}{cF_0 + g} + \frac{cF'_0}{(cF_0 + g)^2}\frac{(V_0 - v)^2}{1.2}$$
$$- \frac{cF''_0(cF_0 + g) - 2c^2F'^2_0}{(cF_0 + g)^3}\frac{(V_0 - v)^3}{1.2.3} + \dots$$

Mouvement ascendant g a le signe $+$
— descendant g —
Pour $g = 0$, on retrouve les formules du n° 58.
Pour $c = 0$, on a les formules du vide.

78. Cas de $F(v) = B_n v^n$. — Les formules 4) et 6) deviennent dans ce cas :

$$y = V_0\frac{V_0 - v}{b_nV_0^n + g} + \frac{1}{1.2}\left[(n-1)b_nV_0^n - g\right]\left(\frac{V_0 - v}{b_nV_0^n + g}\right)^2$$
$$+ \frac{1}{1.2.3}nb_nV_0^{n-1}\left[(n-1)b_nV_0^n - (n+1)g\right]\left(\frac{V_0 - v}{b_nV_0^n + g}\right)^3 + \dots$$
$$t = \frac{V_0 - v}{b_nV_0^n + g} + \frac{1}{1.2}nb_nV_0^{n-1}\left(\frac{V_0 - v}{b_nV_0^n + g}\right)^2$$
$$+ \frac{1}{1.2.3}nb_nV_0^{n-2}\left[(n+1)b_nV_0^n - (n-1)g\right]\left(\frac{V_0 - v}{b_nV_0^n + g}\right)^3 + \dots$$

79. Développement en séries de fonctions. — Les développements en séries de Mac-Laurin qui viennent d'être donnés sont tout à fait généraux, mais ils supposent pour être applicables qu'on ne s'éloigne que très peu du point origine du développement. On peut donner, pour le

mouvement vertical dans l'air, deux autres séries qui comprennent dans leurs termes, au lieu des dérivées successives de la fonction de résistance, des intégrales qui embrassent une région beaucoup plus étendue de la fonction $F(v)$ et qui constituent des approximations successives du mouvement, d'autant plus voisines de la valeur exacte que le nombre d'intégrales sera plus considérable.

Ces formules sont déduites de la comparaison de l'ordre de grandeur relatif des deux forces en présence, la gravité g et la résistance de l'air $cF(v)$: 1° lorsque le rapport $\frac{g}{cF(v)}$ sera plus petit que l'unité, on pourra chercher un développement suivant les puissances de $\frac{1}{c}$, inverse du coefficient balistique ; 2° lorsque le rapport $\frac{cF(v)}{g}$ sera plus petit que l'unité, on pourra au contraire chercher un développement suivant les puissances de c, coefficient balistique.

Ces deux développements s'excluent mutuellement au même point, l'un étant convergent et l'autre divergent.

80. Premier cas. Développement suivant les puissances de $\frac{1}{c}\left[\frac{g}{cF(v)} < 1\right]$.

1° On écrira, pour le *mouvement ascendant* :

$$cdt = -\frac{dv}{F(v)}\,\frac{1}{1+\frac{g}{cF(v)}}.$$

Développant par la formule du binôme la fraction $\frac{1}{1+\frac{g}{cF(v)}}$ en une série convergente, puisque $\frac{g}{cF(v)} < 1$, il viendra :

$$cdt = -\frac{dv}{F(v)}\left[1 - \frac{g}{cF} + \left(\frac{g}{cF}\right)^2 - \cdots (-1)^q\left(\frac{g}{cF}\right)^q\right].$$

De même, pour y, on aura :

$$cdy = -\frac{vdv}{F(v)}\left[1 - \frac{g}{cF} + \left(\frac{g}{cF}\right)^2 + \dots (-1)^q \left(\frac{g}{cF}\right)^q\right].$$

Posons comme définition de deux intégrales :

$$S_{-p} = -\int_{V_0}^{v} \frac{dv}{F^p} \qquad \text{et} \qquad D_{-p} = -\int_{V_0}^{v} \frac{vdv}{F^p}.$$

Il viendra :

Mouvement ascendant.
$$\begin{cases} ct = S_{-1} - \frac{g}{c} S_{-2} + \left(\frac{g}{c}\right)^2 S_{-3} + \dots (-1)^p \left(\frac{g}{c}\right)^p S_{-(p+1)} + \dots \\ cy = D_{-1} - \frac{g}{c} D_{-2} + \left(\frac{g}{c}\right)^2 D_{-3} + \dots (-1)^p \left(\frac{g}{c}\right)^p D_{-(p+1)} + \dots \end{cases}$$

2° Pour le *mouvement descendant* on écrit :

$$cdt = -\frac{dv}{F(v)} \frac{1}{1 - \frac{g}{cF}} = -\frac{dv}{F(v)}\left[1 + \frac{g}{cF} + \left(\frac{g}{cF}\right)^2 + \dots + \left(\frac{g}{cF}\right)^q\right]$$

On voit ainsi qu'il suffira de changer g en $-g$ et on aura :

Mouvement descendant.
$$\begin{cases} ct = S_{-1} + \frac{g}{c} S_{-2} + \left(\frac{g}{c}\right)^2 S_{-3} + \dots + \left(\frac{g}{c}\right)^p S_{-(p+1)}. \\ cy = D_{-1} + \frac{g}{c} D_{-2} + \left(\frac{g}{c}\right)^2 D_{-3} + \dots + \left(\frac{g}{c}\right)^p D_{-(p+1)}. \end{cases}$$

On remarquera que

$$S_{-1} = -\int_{V_0}^{v} \frac{dv}{F(v)} = \mathbf{S}(v) - \mathbf{S}(V_0)$$

S étant la fonction balistique rencontrée dans le mouvement rectiligne horizontal (48).

De même on a $D_{-1} = \mathbf{D}(v) - \mathbf{D}(V_0)$.

Les premiers termes du développement sont donc ceux du mouvement rectiligne horizontal ; les termes suivants qui

renferment g, introduisent de plus en plus l'influence de la gravité.

Le mouvement *descendant* qui est représenté par les développements ci-dessus est celui qui a lieu suivant la branche $\Omega'Z$ de la courbe (v, cy) du n° 69, puisque $\frac{cF(v)}{g} > 1$ et par suite $v > v'$.

Dans ce cas, on sait que la vitesse décroît toujours jusqu'à la vitesse terminale v'.

81. **Exemple. Cas de $F(v) = B_n v^n$.** — Posons : $cB_n = b_n$. On a :

$$S_{-p} = -\frac{1}{B_n^p}\int_{V_0}^{v}\frac{dv}{v^{np}} = \frac{1}{B_n^p}\frac{1}{np-1}\left[\frac{1}{v^{np-1}} - \frac{1}{V_0^{np-1}}\right]$$

$$D_{-p} = -\frac{1}{B_n^p}\int_{V_0}^{v}\frac{dv}{v^{np-1}} = \frac{1}{B_p^n}\frac{1}{np-2}\left[\frac{1}{v^{np-2}} - \frac{1}{V_0^{np-2}}\right]$$

Les formules deviennent alors :

$$b_n t = \frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{v^{n-1}} - \frac{1}{V_0^{n-1}}\right) \pm \left(\frac{g}{b_n}\right)\frac{1}{2n-1}\left(\frac{1}{v^{2n-1}} - \frac{1}{V_0^{2n-1}}\right) + \left(\frac{g}{b_n}\right)^2\frac{1}{3n-1}\left(\frac{1}{v^{3n-1}} - \frac{1}{V_0^{3n-1}}\right) + \cdots$$

$$b_n x = \frac{1}{n-2}\left(\frac{1}{v^{n-2}} - \frac{1}{V_0^{n-2}}\right) \pm \left(\frac{g}{b_n}\right)\frac{1}{2n-2}\left(\frac{1}{v^{2n-2}} - \frac{1}{V_0^{2n-2}}\right) + \left(\frac{g}{b_n}\right)^2\frac{1}{3n-2}\left(\frac{1}{v^{3n-2}} - \frac{1}{V_0^{3n-1}}\right) + \cdots$$

Le signe — doit être pris pour le mouvement *ascendant*.
Le signe + doit être pris pour le mouvement *descendant*.

82. **Deuxième cas. Développement suivant les puissances de c $\left[\frac{cF(v)}{g} < 1\right]$.**

1° Pour le *mouvement ascendant*, on écrira :

$$gdt = -\frac{dv}{1 + \frac{cF}{g}}$$

Développant par la formule du binôme la fraction $\frac{1}{1 + \frac{cF}{g}}$ en une série convergente, puisque $\frac{cF(v)}{g} < 1$, il viendra :

$$gdt = -dv\left[1 - \frac{cF}{g} + \left(\frac{cF}{g}\right)^2 + \dots (-1)^q \left(\frac{cF}{g}\right)^q\right]$$

De même pour y, on aura :

$$gdy = -vdv\left[1 - \frac{cF}{g} + \left(\frac{cF}{g}\right)^2 \dots + (-1)^q \left(\frac{cF}{g}\right)^q\right]$$

Posons comme définitions de deux intégrales

$$S_p = -\int_{V_0}^{v} F^p dv \qquad \text{et} \qquad D_p = -\int_{V_0}^{v} vF^p dv$$

Il viendra :

Mouvement ascendant.
$$\begin{cases} gt = S_0 - \frac{c}{g} S_1 + \left(\frac{c}{g}\right)^2 S_2 + \dots \quad (-1)^p \left(\frac{c}{g}\right)^p S_p \\ gy = D_0 - \frac{c}{g} D_1 + \left(\frac{c}{g}\right)^2 D_2 + \dots \quad (-1)^p \left(\frac{c}{g}\right)^p D_p \end{cases}$$

2° Pour le *mouvement descendant*, on écrira :

$$gdt = \frac{dv}{1 - \frac{cF}{g}} = dv\left[1 + \frac{cF}{g} + \left(\frac{cF}{g}\right)^2 + \dots \quad + \left(\frac{cF}{g}\right)^q\right]$$

d'où :

Mouvement descendant.
$$\begin{cases} gt = -S_0 - \frac{c}{g} S_1 - \left(\frac{c}{g}\right)^2 S_2 - \dots \quad (-1)^p \left(\frac{c}{g}\right)^p S \\ gy = -D_0 - \frac{c}{g} D_1 - \left(\frac{c}{g}\right)^2 D_2 - \dots \quad (-1)^p \left(\frac{c}{g}\right)^p D_p \end{cases}$$

On remarquera que

$$S_0 = -\int_{V_0}^{v} dv = V_0 - v \quad \text{et} \quad D_0 = -\int_{V_0}^{v} v dv = \frac{1}{2}(V_0^2 - v^2)$$

Les premiers termes des formules sont ainsi les termes du vide. Les termes qui suivent introduisent la résistance de l'air.

Ces développements sont valables de part et d'autre du point S pour les régions de la courbe (v, cy) du n° 69 situées *en aval* du point de la branche ascendante où la vitesse v' est telle que $cF(v') = g$.

83. Problèmes sur le mouvement dans le voisinage du point culminant. — 1° *On lance un corps de bas en haut avec une vitesse très faible V_0 ; quelle sera la perte de vitesse qu'il aura subie en retombant à la même altitude y.*

Le théorème des forces vives donne immédiatement

$$\frac{1}{2}(V_0^2 - v^2) = 2 \int_{V_0}^{0} cF dy$$

ou, en première approximation :

$$\frac{1}{2}(V_0^2 - v^2) = 2 \frac{c}{g} \int_{V_0}^{0} vF(v) dv.$$

c'est-à-dire :

$$v^2 = V_0^2 + 4 \frac{c}{g} D_1(0, V_0)$$

ou encore :

$$v = V_0 + \frac{2}{V_0} \frac{c}{g} D_1(0, V_0)$$

Exercice. — *a*) Retrouver cette formule au moyen du développement donné ci-dessus (82).

b) Chercher le second terme dont le coefficient est $\frac{c^2}{g^2}$.

2° *Un corps tombe sans vitesse; il arrive à un plan situé à*

une hauteur h au-dessous de son point de départ au bout d'un temps t. Quel est le retard $\rho = \theta - t$ qu'il a subi du fait de la résistance de l'air ?

Si v est la vitesse du projectile dans l'air à l'arrivée au plan h au bout du temps t; si v_0 est la vitesse du projectile dans le vide à l'arrivée au plan h, au bout du temps θ, on a, d'après le théorème précédent :

$$v = v_0 + \frac{1}{v_0}\frac{c}{g}\,D_1(o, v_0)$$

On a d'ailleurs :

$$g\theta = v_0 \qquad \text{et} \qquad gt = v - \frac{c}{g}\,S_1(o, v_0)$$

Donc :

$$g(\theta - t) = v_0 - v + \frac{c}{g}\,S_1(o, v_0)$$

c'est-à-dire

$$\rho = -\frac{1}{g}\,\frac{c}{g}\left[\frac{D_1}{v_0} - S_1\right]$$

84. **Cas de $\mathbf{F(v) = B_n v^n}$.** — On a pour les développements du n° 82 :

$$S_p = -B_n^p \int_{V_0}^{v} v^{np}dv = B_n^p \frac{1}{np+1}(V_0^{np+1} - v^{np+1})$$

$$D_p = -B_n^p \int_{V_0}^{v} v^{np+1}dv = B_n^p \frac{1}{np+2}(V_0^{np+2} - v^{np+2})$$

Posant $cB_n = b_n$, on aura donc :

$$gt = \pm(V_0 - v) - \frac{b_n}{g}\frac{1}{n+1}(V_0^{n+1} - v^{n+1})$$
$$\pm \left(\frac{b_n}{g}\right)^2 \frac{1}{2n+1}(V_0^{2n+1} - v^{n+1})$$
$$\ldots (-1)^p \left(\frac{b_n}{g}\right)^p \frac{1}{np+1}(V_0^{np+1} - V^{np+1})$$

$$gy = \pm \frac{1}{2}(V_0^2 - v^2) - \frac{b_n}{g}\frac{1}{n+2}(V_0^{n+2} - v^{n+2})$$
$$\pm \left(\frac{b^n}{g}\right)^2 \frac{1}{2n+2}(V_0^{2n+2} - v^{2n+2})$$
$$\cdots + (-1)^p \left(\frac{b_n}{g}\right)^p \frac{1}{np+2}(V_0^{np+2} - v^{np+2})$$

Le signe + doit être pris pour le mouvement *ascendant.*
Le signe — doit être pris pour le mouvement *descendant.*

Le premier problème traité ci-dessus (83) donnera dans le cas de $F(v) = B_n v^n$

$$v = V_0 - 2\frac{b_n}{g}\frac{1}{n+2}V_0^{n+1}.$$

Le second donnera pour valeur du retard

$$\rho = \frac{1}{g}\frac{b_n}{g}\frac{v_0^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$$

ou encore, puisque $g\theta = v_0$,

$$\rho = b_n g^{n-1}\frac{\theta^{n+1}}{(n+1)(n+2)}.$$

85. **Mouvement au voisinage de la vitesse terminale.** — Supposons que le projectile soit arrivé à posséder, dans son mouvement descendant, une vitesse v peu différente en moins ou en plus (69) de la vitesse terminale v' et cherchons la forme simple que prennent les équations du mouvement quand on admet cette hypothèse.

Posons donc identiquement

$$v = v' - (v' - v)$$

$(v' - v)$ sera, par hypothèse, une petite quantité relativement à laquelle nous effectuerons les développements en série des deux formules du mouvement descendant :

$$gdt = \frac{dv}{1 - \frac{c}{g}F(v)} \qquad \text{et} \qquad gdy = \frac{vdv}{1 - \frac{c}{g}F(v)}$$

On écrira, pour la première

$$gdt = -\frac{d(v'-v)}{1-\frac{c}{g}\mathrm{F}[v'-(v'-v)]}$$

$$= -\frac{d(v'-v)}{1-\frac{c}{g}\mathrm{F}(v')+\frac{c}{g}(v'-v)\,\mathrm{F}'(v')-\frac{c}{g}\frac{(v'-v)^2}{1.2}\mathrm{F}''(v')+\cdots}$$

et comme $\frac{c}{g}\,\mathrm{F}(v') = 1$ par hypothèse, il viendra

$$c\mathrm{F}'(v')dt = -\frac{d(v'-v)}{v'-v}\frac{1}{1-\frac{v'-v}{1.2}\frac{\mathrm{F}''}{\mathrm{F}'}} = -\frac{d(v'-v)}{v'-v}-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{F}''}{\mathrm{F}'}d(v'-v)$$

d'où en intégrant, avec l'hypothèse $v = \mathrm{V}_0$ pour $t = 0$,

$$c\mathrm{F}'t = \mathrm{Log}\,\frac{v'-\mathrm{V}_0}{v'-v}+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{F}''}{\mathrm{F}'}(v-\mathrm{V}_0)+\cdots$$

L'*espace* s'intégrera d'une manière tout à fait analogue et donnera l'équation :

$$c\mathrm{F}'y = v'\,\mathrm{Log}\,\frac{v'-\mathrm{V}_0}{v'-v}+\left(\frac{v'\mathrm{F}''}{2\mathrm{F}'}-1\right)(v-\mathrm{V}_0)+\cdots$$

Enfin l'élimination de v entre les deux équations ci-dessus donnera une relation entre y et t qui est la suivante :

$$y = \mathrm{V}_0 t+(v'-\mathrm{V}_0)t-\left[\frac{1-e^{-c\mathrm{F}'t}}{c\mathrm{F}'}\right]+\cdots$$

Tels sont les deux premiers termes du développement en série dans le voisinage de la vitesse terminale v'.

La dernière équation qui peut s'écrire :

$$y = v't-\frac{v'-\mathrm{V}_0}{c\mathrm{F}'}(1-e^{-c\mathrm{F}'t})$$

montre que le mouvement est presque uniforme et qu'il y tend, quand t augmente, avec une allure exponentielle.

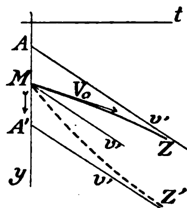


Fig. 33

Si on construit la courbe (y, t) à partir de l'origine M où la vitesse est V_0, la courbe MZ admettra comme asymptote une droite ayant la direction v' et telle que $MA = \frac{v' - V_0}{cF'(v')}$.

On pourrait dans le voisinage de v' partir d'une vitesse $V_0 > v'$. La courbe correspondante sera MZ' avec une asymptote en A' telle que $MA' = \frac{V_0 - v'}{cF'(v')}$.

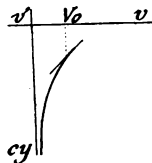


Fig. 34.

La courbe (v, cy) qui a été considérée précédemment (69) tend asymptotiquement vers v' par une allure exponentielle, car réduite à son premier terme l'équation de cette courbe est :

$$v = v' - (v' - V_0)\, e^{-\frac{cF'y}{v'}}.$$

LIVRE II

LES PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES TRAJECTOIRES ATMOSPHÉRIQUES

CHAPITRE IV

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU MOUVEMENT

§ 1. — Établissement des équations

86. **Première forme. Deux équations du second ordre.** — On sait (6) que dans le *problème balistique principal*, on se propose d'étudier le mouvement d'un point matériel de masse m soumis à l'action de deux forces : la *pesanteur* dirigée de haut en bas et la *résistance du milieu* dirigée suivant la tangente à la trajectoire du point et en sens inverse de la vitesse.

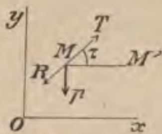


Fig. 35.

Soient les axes Ox horizontal, Oy vertical. M est la position du mobile au temps t, R est la résistance de l'air, force exprimée en kilos comme le poids p du projectile (10), τ est l'inclinaison de la tangente MT sur l'horizontale MM′. C'est aussi l'angle que fait avec l'horizontale la résistance R, qu'on suppose *tangentielle* (5).

En projetant successivement sur les deux axes Ox et Oy, on écrira :

sur l'axe des x : $$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\mathrm{R}\cos\tau$$

sur l'axe des y : $$m\frac{d^2y}{dt^2} = -p - \mathrm{R}\sin\tau.$$

Divisons les deux membres de chaque équation par m ; la quantité $\frac{\mathrm{R}}{m}$ représente l'accélération I due à la résistance de l'air (10). Cette accélération ne dépend, par hypothèse, pour un projectile donné, que de la vitesse v de translation : elle a pour expression $\mathrm{I} = c\mathrm{F}(v)$, formule où c représente le coefficient balistique $\left[c = i\Delta\frac{a^2}{p}\right]$ et $\mathrm{F}(v)$ une fonction dont on connaît au moins une table numérique (11).

On aura donc pour définir le mouvement principal, les deux équations du second ordre suivantes :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -c\mathrm{F}(v)\cos\tau, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -g - c\mathrm{F}(v)\sin\tau.$$

87. **Deuxième forme. Quatre équations du premier ordre**. — Les deux équations du deuxième ordre ci-dessus sont équivalentes à quatre équations différentielles du premier ordre qu'on obtiendra très aisément en remarquant que

$$\frac{dx}{dt} = v\cos\tau, \qquad \frac{dy}{dt} = v\sin\tau$$

On aura alors :

$$\frac{d(v\cos\tau)}{dt} = -c\mathrm{F}(v)\cos\tau$$

$$\frac{d(v \sin \tau)}{dt} = -g - cF(v) \sin \tau$$

Les quatre équations qui viennent d'être écrites peuvent être développées et combinées de plusieurs façons.

Ainsi développons les $\frac{d}{dt}$ dans les deux dernières ; il vient :

(1) $$\cos \tau \frac{dv}{dt} - v \sin \tau \frac{d\tau}{dt} = -cF(v) \cos \tau$$

(2) $$\sin \tau \frac{dv}{dt} + v \cos \tau \frac{d\tau}{dt} = -g - cF(v) \sin \tau.$$

Multiplions (1) par $\sin \tau$ et (2) par $\cos \tau$ et retranchons (1) de (2) ; il viendra :

(3) $$\frac{v d\tau}{dt} = -g \cos \tau.$$

Multiplions (1) par $\cos \tau$ et (2) par $\sin \tau$ et ajoutons ; il viendra :

(4) $$\frac{dv}{dt} = -g \sin \tau - cF(v).$$

Par l'élimination de dt, les équations (3) et (4) combinées donnent :

(5) $$\frac{d(v \cos \tau)}{d\tau} = \frac{c}{g} vF(v).$$

Pour discuter et résoudre le problème balistique, on pourra d'ailleurs choisir telle ou telle combinaison de ces équations qu'on voudra et nous aurons plus loin l'occasion d'en utiliser quelques-unes.

88. **Système des quatre équations usuelles.** — Nous choisirons généralement pour tout le développement de la théorie du problème balistique principal les équations (3) et (5) que nous joindrons aux équations de définition de $v\cos\tau$ et de $v\sin\tau$, mais après y avoir remplacé la variable dt par la variable $d\tau$, au moyen de l'équation (3).

On obtient ainsi le système des quatre équations suivantes :

I. $\frac{d(v\cos\tau)}{d\tau} = \frac{c}{g} vF(v)$ qui relie l'*inclinaison* τ à la vitesse v

$dt = -\frac{v}{g}\frac{d\tau}{\cos\tau}$ — le *temps* t à v et à τ

$dx = -\frac{v^2}{g} d\tau$ — l'*abscisse* x à v et à τ

$dy = -\frac{v^2}{g} \operatorname{tg}\tau\, d\tau$ — l'*ordonnée* y à v et à τ.

On introduit souvent aussi la variable u, *vitesse horizontale* définie par la relation $u = v\cos\tau$.

De plus, pour abréger les notations, on convient de remplacer $F(v)$ par la notation plus simple F.

On obtient alors le système suivant, analogue à celui du vide (16) :

$$\text{II.}\quad \begin{cases} \dfrac{du}{d\tau} = \dfrac{c}{g} vF\,; & dx = -\dfrac{u^2}{g}\dfrac{d\tau}{\cos^2\tau}\,; \\ dt = -\dfrac{u}{g}\dfrac{d\tau}{\cos^2\tau}\,; & dy = -\dfrac{u^2}{g}\operatorname{tg}\tau\dfrac{d\tau}{\cos^2\tau}. \end{cases}$$

On remarquera en plus l'expression qui donne l'arc $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$

d'où $$ds = -\frac{v^2}{g}\frac{d\tau}{\cos\tau} = -\frac{u^2}{g}\frac{d\tau}{\cos^3\tau}.$$

89. **Équations intrinsèques**. — Soit comme au nº 20, les forces projetées d'une part sur la tangente MT, d'autre part sur la normale MN à la trajectoire au point M ; r est le rayon de courbure en M.

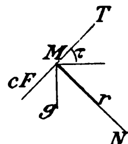


Fig. 36.

On aura sur la tangente

$$\frac{dv}{dt} = -g \sin \tau - c\mathrm{F},$$

et sur la normale $\frac{v^2}{r} = -g \cos \tau$.

La première est la relation (4) déjà trouvée.

La seconde peut se déduire de l'équation (3)

$\frac{vd\tau}{dt} = -g \cos \tau$ de la manière suivante : soient M et M′ deux points très voisins ; les normales en ces points se coupent en I. Comme MM′ = MI$d\tau$, MM′ = vdt et MI = r, il vient $vdt = rd\tau$.

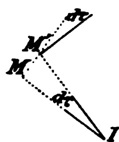


Fig. 37.

L'équation $\frac{vd\tau}{dt} = -g \cos \tau$ pourra donc s'écrire :

$$\frac{v^2}{r} = -g \cos \tau$$

ce qui est l'équation intrinsèque sur la normale.

On remarquera que cette équation est indépendante de la résistance de l'air. En projetant sur l'axe des x on obtient une équation qui est indépendante de la seconde force, la gravité ; c'est comme on sait (87) l'équation

$$\frac{d(v \cos \tau)}{dt} = -c\mathrm{F} \cos \tau.$$

90. **De l'hodographe**. — Parmi toutes les com-

binaisons possibles des équations différentielles du premier ordre du problème balistique, la première des quatre équations du n° 88, savoir :

$$\frac{d(v \cos \tau)}{d\tau} = \frac{c}{g} v\mathrm{F}(v)$$

possède seule l'importante propriété de n'être fonction que de deux variables, la vitesse v et l'inclinaison τ. Son intérêt particulier résulte du théorème suivant :

L'intégration de l'équation $\frac{d(v \cos \tau)}{d\tau} = \frac{c}{g} v\mathrm{F}(v)$ *permet de ramener immédiatement aux quadratures la solution complète du problème balistique.*

Supposons en effet qu'on sache intégrer cette équation et exprimer par suite v en fonction de τ, sous la forme $v = \Psi(\tau)$; on substituera cette valeur de v dans les trois autres équations du mouvement (88) qui prendront la forme

$$dt = -\frac{1}{g}\Psi(\tau)\frac{d\tau}{\cos \tau}; \qquad dx = -\frac{1}{g}\overline{\Psi(\tau)}^2 d\tau;$$

$$dy = -\frac{1}{g}\overline{\Psi(\tau)}^2 \operatorname{tg} \tau \, d\tau.$$

La question est ramenée à de simples quadratures ; la solution au moins théorique du problème balistique est complète et tous les éléments se trouvent exprimés en fonction de l'inclinaison τ.

La recherche de l'intégrale de l'équation

$$\frac{d(v \cos \tau)}{d\tau} = \frac{c}{g} v\mathrm{F}(v)$$

apparaît donc comme le premier pas vers la solution

du problème balistique ; cette opération effectuée, il restera, il est vrai, à surmonter encore de notables difficultés analytiques, soit pour tirer v ou τ de l'intégrale en vue de porter leurs valeurs dans les autres équations différentielles, soit pour intégrer ces dernières.

L'équation différentielle

$$\frac{d(v \cos \tau)}{d\tau} = \frac{c}{g} vF(v)$$

est désignée en Balistique sous le nom *d'équation différentielle de l'hodographe.*

Remarque. — On peut introduire dans cette équation le rayon de courbure r au lieu de v, puisqu'on a (89) $v = \sqrt{-gr \cos \tau}$. On trouve, avec les deux variables r et τ, l'équation différentielle

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{r}{g \cos \tau} \left[3g \sin \tau + 2cF\left(\sqrt{-gr \cos \tau}\right)\right].$$

91. **Génération de l'hodographe.** — On appelle en général *hodographe* ou *courbe que décrit la vitesse* une courbe engendrée comme il suit : par le point fixe O, on mène à chaque instant un vecteur OH parallèle à la tangente à la trajectoire, c'est-à-dire faisant un angle τ avec une droite horizontale Ox ; on prend sur le vecteur une longueur OH proportionnelle à la vitesse du point matériel sur la trajectoire ; le point H décrit ainsi une courbe polaire PQ qui est l'*hodographe.*

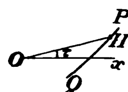


Fig. 38.

Il s'agit de démontrer que, dans le cas du problème balistique, l'hodographe qui vient d'être défini

admet bien pour équation différentielle, la relation

$$\frac{d(v \cos \tau)}{d\tau} = \frac{c}{g}\, v\mathrm{F}(v).$$

Soient deux rayons vecteurs OH et OK infiniment voisins, de longueurs v et $v + dv$ et faisant avec l'axe Ox des angles τ et $\tau - d\tau$.

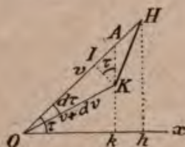


Fig. 39.

Le segment HK de l'hodographe représente donc en grandeur et en direction l'accroissement de la vitesse v du projectile pendant le temps dt. Si G est l'accélération totale du mobile, c'est-à-dire une quantité telle que $\mathrm{G} = \frac{dv}{dt}$, on aura $\mathrm{HK} = \mathrm{G}dt$.

Mais on sait que l'accélération totale G qui agit sur le projectile est la résultante : 1° *de la gravité* g qui agit suivant la verticale ; 2° de l'*accélération de la résistance de l'air* $c\mathrm{F}(v)$ qui agit suivant la direction de la tangente, en sens inverse de la vitesse.

Or le segment AK a la direction de la gravité, le segment AH a la direction de la résistance de l'air ; comme HK est leur résultante en grandeur et en direction, on aura :

$$\mathrm{AK} = g dt \qquad \text{et} \qquad \mathrm{AH} = -\, c\mathrm{F}(v)dt.$$

Si KI est perpendiculaire sur OH, on a $\mathrm{KI} = \mathrm{KA} \cos \tau$ et comme $\mathrm{KI} = v d\tau$, il viendra

$$v d\tau = -\, g \cos \tau\, dt.$$

D'autre part, si hk est la projection du segment HK

sur Ox, on a $hk \doteq$ AH cos τ, ce qui peut s'écrire :

$$d(v \cos \tau) = c\mathrm{F}(v) \cos \tau \, dt.$$

En éliminant dt entre les équations précédentes, on retrouve bien l'équation différentielle de l'hodographe :

$$\frac{d(v \cos \tau)}{d\tau} = \frac{c}{g} v\mathrm{F}(v) \qquad \text{c. q. f. d.}$$

92. **Cas particuliers de l'hodographe.** — 1° *Dans le vide l'hodographe est une verticale.* — Car si $c = 0$, l'équation de l'hodographe donne $d(v \cos \tau) = 0$, d'où $v \cos \tau =$ const. C'est la propriété bien connue de la constance de la vitesse horizontale (17). L'hodographe est la verticale H H′ H″ située à une distance OH′ $= \mathrm{V}_0 \cos \alpha$ de l'origine.

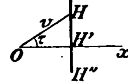


Fig. 40.

2° *Dans le cas du mouvement rectiligne, l'hodographe est une droite passant par l'origine.* — Car si $g = 0$, on doit avoir $d\tau = 0$, d'où $\tau =$ const. $= \alpha$. L'hodographe est le vecteur d'inclinaison α passant par l'origine.

3° *Dans le cas d'une résistance proportionnelle à la simple vitesse, l'hodographe est une ligne droite.* — Soit H un point de l'hodographe. Pour obtenir la tangente en H, on a vu (91) qu'il fallait prendre HA $= c\mathrm{F}dt$ et AK $= gdt$. Dans le cas actuel, on a $\mathrm{F}(v) = \mathrm{B}_1 v$ et $c\mathrm{B}_1 = b_1$; on écrira donc HA $= b_1 v dt$.

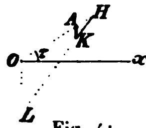


Fig. 41.

Soit L le point où la tangente HK rencontre la verticale du point O. On aura :

$$\frac{\mathrm{OL}}{\mathrm{AK}} = \frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{AH}} = \frac{1}{b_1 dt}$$

d'où :

$$\mathrm{OL} = \frac{g}{b_1}$$

Le point L est donc un point fixe et par suite l'hodographe est la droite HL elle-même.

93. **Équation du C[1] Jacob.** — 1° Nous avons dit que l'équation différentielle de l'hodographe était la seule, du premier ordre, entre les variables du problème balistique qui fut fonction seulement de deux variables v et τ.

Mais il peut exister des équations différentielles d'ordre supérieur au premier n'ayant également que deux variables. Le colonel Jacob a fait connaître une de ces équations qui est particulièrement remarquable : *On peut former une équation différentielle du second ordre du problème balistique ne renfermant que les variables v et y, et se ramenant à deux équations du premier ordre.*

2° Pour établir cette équation, il suffit d'éliminer la variable τ entre les deux équations :

$$\frac{d(v\cos\tau)}{d\tau} = \frac{c}{g} v\mathrm{F} \qquad \text{et} \qquad dy = -\frac{v^2}{g}\,\mathrm{tg}\,\tau\, d\tau.$$

Développant chacune d'elles, on aura :

$$\cos\tau\, dv - v\sin\tau\, d\tau = \frac{c}{g}\, v\mathrm{F}d\tau$$

$$g\cos\tau\, dy + v^2\sin\tau\, d\tau = 0.$$

On aperçoit de suite la raison de la réussite de ce calcul dans la forme des premiers membres des équations ; en multipliant la première équation par v et en ajoutant on obtiendra la valeur de $\frac{d\tau}{\cos\tau}$ sous la forme :

$$\frac{d\tau}{\cos\tau} = \frac{g}{cv^2\mathrm{F}}(v dv + g dy).$$

On pourra donc, en portant cette valeur dans la deuxième, en tirer la valeur de $\sin\tau$ qui est :

$$\sin\tau = -\frac{vdv + gdy}{cFdy}.$$

Nous poserons :

$$\frac{dy}{dv} = y'_v$$

et l'expression de $\sin\tau$ deviendra :

$$\sin\tau = -\frac{cFy'_v}{v + gy'_v}$$

3° Considérons maintenant les équations simultanées qui peuvent remplacer les deux premières, savoir :

$$g\cos\tau\, dy + v^2 \sin\tau\, d\tau = 0 \quad \text{et} \quad \sin\tau = -\frac{cFy'_v}{v + gy'_v},$$

entre lesquelles il s'agit d'éliminer τ.

Écrivons identiquement la première :

$$g\cos^2\tau\, dy + v^2 \sin\tau\cos\tau\, d\tau = 0$$

ou :

$$g(1 - \sin^2\tau)\frac{dy}{dv} + v^2\sin\tau\frac{d\sin\tau}{dv} = 0.$$

Or, la seconde équation donne $\sin\tau$ en fonction de y'_v et v et, en la différentiant, on aura $\frac{d\sin\tau}{dv}$ en fonction des mêmes variables ; en substituant les valeurs ainsi trouvées dans l'équation en $\sin\tau$ et $d\sin\tau$, on éliminera τ et le problème sera résolu.

On trouve ainsi l'équation :

$$gv^3y''_v + g^3y'^3_v\left[\left(\frac{g}{cF}\right)^2 - 1\right]$$
$$+ gv\left[3\left(\frac{g}{cF}\right)^2 + \frac{vF'}{F} - 1\right]\left[gy'^2_v + vy'_v\right] + \left(\frac{g}{cF}\right)^2 v^3 = 0.$$

C'est l'équation du second ordre cherchée. *On doit remarquer qu'elle n'est plus que du premier ordre si on prend comme variable la dérivée :*

$$y'_v = \frac{dy}{dv}.$$

Si on suppose l'équation différentielle résolue, c'est-à-dire y connu en fonction de v, les autres éléments de la trajectoire s'obtiendront par les formules suivantes :

$$\sin\tau = -\frac{cFy'_v}{v + gy'_v}; \; x = \int_\alpha^\tau \frac{y'_v}{\operatorname{tg}\tau}dv; \; t = \int_\alpha^\tau \frac{y'_v}{v\sin\tau}dv;$$

Les deux dernières résultent immédiatement des formules

$$dy = \operatorname{tg}\tau \, dx \quad \text{et} \quad dy = v\sin\tau \, dt.$$

94. **Équations différentielles en coordonnées obliques**. — Il est utile, pour certaines questions de Balistique, de rapporter le mouvement à des axes obliques qui sont : 1° la tangente Oz à l'origine de la trajectoire ; la coordonnée sera l'*éloignement* du projectile suivant cette ligne au temps t ; 2° la verticale Oy passant par l'origine ; les y seront comptés positivement dans le sens où agit la pesanteur ; ils représenteront donc

l'*abaissement* du projectile au temps t au-dessous de la ligne de projection Oz.

Soient M la position du projectile au temps t, g la gravité, cF l'accélération de la résistance agissant en sens inverse de la vitesse v.

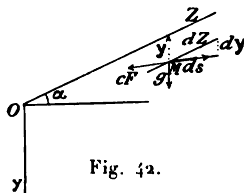


Fig. 42.

ds est un petit arc de trajectoire, dz sa projection oblique sur Oz; dy sa projection oblique sur Oy.

Les composantes de la résistance cF suivant les axes seront :

suivant Oz $\quad cF\dfrac{dz}{ds}$ et comme $ds = vdt \quad \dfrac{cF}{v}\dfrac{dz}{dt}$.

suivant Oy $\quad cF\dfrac{dy}{ds}$ — $\quad \dfrac{cF}{v}\dfrac{dy}{dt}$.

On a donc pour les équations différentielles du mouvement :

suivant Oz
$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{cF}{v}\frac{dz}{dt}$$

suivant Oy
$$\frac{d^2y}{dt^2} = g - \frac{cF}{v}\frac{dy}{dt}.$$

Nous allons, comme il a été fait précédemment dans le cas des axes rectangulaires, remplacer ces deux équations du second ordre par quatre équations du premier ordre.

Éliminant d'abord $\dfrac{cF}{v}$ entre les deux équations, on a :

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dt^2}\frac{dz}{dt} - \frac{d^2z}{dt^2}\frac{dy}{dt} = g\frac{dz}{dt}.$$

Posons maintenant

$\frac{dz}{dt} = v_z$; v_z est la vitesse du projectile projetée sur Oz suivant la verticale

$\frac{dy}{dz} = p$; p est une quantité qui mesure l'angle de la trajectoire avec Oz au point M ; p a la valeur o au point O.

Écrivant $\frac{dy}{dt} = p\frac{dz}{dt}$ et différentiant, il viendra :

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dp}{dt}\frac{dz}{dt} + p\frac{d^2z}{dt^2}$$

et en combinant avec (1) il vient :

$$dp = \frac{g}{v_z^2}dz$$

et, d'autre part, en combinant avec $\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{cF}{v}\cdot\frac{dz}{dt}$

on aura :

$$dv_z = -\frac{v_z^2}{g}\frac{cF}{v}dp.$$

Cette dernière équation ne renferme en réalité que deux variables, car v peut s'exprimer en fonction de v_z et de p comme il suit :

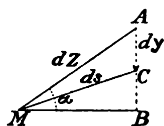


Fig. 43.

Dans le triangle AMC on a :

$$\overline{MC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AM}^2 - 2AC.AM\cos\widehat{MAC};$$

or $MC = ds$; $AC = dy$; $AM = dz$;

$$\widehat{MAC} = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

On a donc : $\overline{ds}^2 = \overline{dy}^2 + \overline{dz}^2 - 2dy\,dz\sin\alpha$

ou en divisant par $\overline{dz}^2$:

$$\left(\frac{ds}{dz}\right)^2 = p^2 + 1 - 2p \sin \alpha.$$

Mais
$$\frac{ds}{dz} = \frac{v}{v_z}.$$

On a donc :

$$v = v_z \left[1 + p^2 - 2p \sin \alpha\right]^{\frac{1}{2}}$$

v est ainsi fonction de v_z et de p.

On pourra adopter pour la solution du problème balistique les quatre équations différentielles du premier ordre qui suivent où $v = v_z \left[1 + p^2 - 2p \sin \alpha\right]^{\frac{1}{2}}$

$$dv_z = -\frac{v_z^2}{g} \frac{cF}{v} dp\,; \qquad dz = \frac{v_z^2}{g} dp\,;$$

$$dt = \frac{v_z}{g} dp\,; \qquad dy = \frac{v_z^2}{g} pdp$$

Ces équations correspondent une à une aux équations du n° 88 dans le cas des axes rectangulaires et il est très facile de passer de celles-ci aux autres quand on fait $\sin \alpha = 0$ et $p = \operatorname{tg} \tau$; v_z devient la vitesse horizontale u. On a d'ailleurs $p = \frac{\sin(\alpha - \tau)}{\cos \tau}$.

La première équation correspond à l'hodographe ; elle n'est fonction que de deux variables v_z et p et son intégration permettrait de ramener le problème aux quadratures.

§ 2. — Problème balistique inverse

95. **Théorème**. — *Si on se donne a priori une relation finie entre deux quelconques des éléments du mouvement en un point quelconque de la trajectoire, savoir* x, y, v, t *et* τ, *on peut calculer les trois autres, sans qu'il y ait besoin de connaître la résistance de l'air, c'est-à-dire la fonction F.*

Cela résulte de ce qu'une des deux équations intrinsèques de la trajectoire (89) ne renferme pas la résistance de l'air supposée tangentielle ; c'est l'équation

$$\frac{v^2}{r} = - g \cos \tau.$$

Cette équation fournit donc une seconde relation entre les quatre éléments x, y (compris dans le rayon de courbure r), v et τ.

On a d'ailleurs en plus :

$$\frac{dx}{dt} = v \cos \tau ; \quad \frac{dy}{dt} = v \sin \tau ; \quad \frac{v d\tau}{dt} = - g \cos \tau$$

c'est-à-dire en tout cinq équations entre cinq inconnues ; aucune des équations ne renferme la fonction F.

96. **Définition du problème balistique inverse**. — Supposons, pour préciser la nature du problème, qu'on ait déterminé expérimentalement la trajectoire d'un projectile en relevant, par exemple, les points d'impacts sur des écrans convenablement disposés. La courbe ainsi déterminée pourra être représentée par une

formule $y = f(x)$, avec une approximation plus ou moins grande.

Le problème balistique inverse consistera tout d'abord à obtenir les valeurs des autres éléments v, τ, t aux points x, y et le théorème précédent démontre que la solution en sera toujours possible.

Mais il sera possible également au moyen des valeurs calculées de les porter dans l'équation de l'hodographe $\frac{d(v \cos \tau)}{d\tau} = \frac{c}{g} vF$, et par suite de déterminer l'expression de la fonction F, seule inconnue de cette équation ; la fonction ainsi déterminée représente la loi de résistance de l'air qu'il aurait fallu admettre pour que la trajectoire soit justement représentée par la fonction $y = f(x)$.

Si on choisit $y = f(x)$ arbitrairement, c'est-à-dire en dehors des quelques formes que l'on obtient par une intégration rigoureuse des équations différentielles où la fonction $F(v)$ affecte une forme particulière, on trouvera par la solution du problème balistique inverse une expression de F qui ne sera pas uniquement fonction de la vitesse de translation v ; il y entrera des constantes définissant l'origine de la trajectoire V_0 et α.

On aura ainsi altéré la loi de résistance de l'air expérimentale et, au degré plus ou moins grand de cette altération, on pourra juger du degré d'approximation que l'équation $y = f(x)$ comporte et des hypothèses que son adoption entraîne.

Au lieu de la relation $y = f(x)$, on peut se donner une relation entre deux autres éléments, ainsi qu'il a été dit précédemment, par exemple, $\operatorname{tg} \tau = \varphi(t)$ ou $\cos \tau = \psi(v)$, etc.

97. **Premier problème balistique inverse. On se donne la trajectoire.** — Soit $y = f(x)$ l'équation donnée de la trajectoire.

Désignons par y', y'' et y''' les dérivées successives de y par rapport à x.

1° On aura tout d'abord pour l'*inclinaison* τ

$\operatorname{tg}\tau = y'$, ce qui peut s'écrire :

$$\cos\tau = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

2° En différentiant l'équation qui donne $\operatorname{tg}\tau$, on aura $\frac{d\tau}{\cos^2\tau} = y''dx$. Mais on a (88)

$$dx = -\frac{v^2\cos^2\tau}{g}\frac{d\tau}{\cos^2\tau}$$

Éliminant $\frac{d\tau}{\cos^2\tau}$, il viendra pour l'expression de la *vitesse* v au point x, y :

$$v^2 = -g\frac{1 + y'^2}{y''}.$$

La *vitesse horizontale* u sera donnée par la relation :

$$u = \sqrt{-\frac{g}{y''}}$$

3° Comme $\frac{dx}{dt} = u$, on aura pour le *temps* t, l'équation :

$$t = \int_0^x \sqrt{-\frac{y''}{g}}\,dx$$

4° Enfin la *fonction F de la résistance* se calculera comme il suit :

Différentiant la relation $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -\frac{g}{y''}$,

on obtient : $$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{gy'''}{2y''^2}$$

Mais, comme la première équation différentielle du mouvement (86) est :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -cF\cos\tau,$$

et que $$\cos\tau = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$$

il viendra : $$cF = -\frac{gy'''}{2y''^2}\sqrt{1+y'^2}$$

Remarquons d'autre part que $v^4 = g^2\,\frac{(1+y'^2)^2}{y''^2}$

et que $$\cos^3\tau = (1+y'^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

On voit qu'on peut mettre l'accélération cF sous la forme : $$cF = -\frac{y'''}{2g}\,v^4\cos^3\tau.$$

Le problème balistique inverse est ainsi complètement résolu à l'aide de différentiations, à l'exception de l'expression de t qui exige une intégration.

98. Application à la trajectoire de Piton-Bressant. — La trajectoire de Piton-Bressant est la suivante :

$$y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{gx^2}{2V_0^2\cos^2\alpha}\,[1 + KV_0^2x]$$

K étant un coefficient constant.

On calcule immédiatement

$$y' = \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx}{V_0^2 \cos^2 \alpha} \left[1 + \frac{3}{2} KV_0^2 x \right]$$

$$y'' = - \frac{g}{V_0^2 \cos^2 \alpha} [1 + 3KV_0^2 x]$$

$$y''' = - \frac{3gK}{\cos^2 \alpha}$$

En employant les formules du numéro précédent, on obtient aisément :

1° $$\operatorname{tg} \tau = \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx}{V_0^2 \cos^2 \alpha} \left(1 + \frac{3}{2} KV_0^2 x \right)$$

inclinaison en fonction de x;

2° $$u = u_0 [1 + 3KV_0^2 x]^{\frac{1}{2}}$$

vitesse horizontale en fonction de x;

3° $$u_0 t = \frac{2}{9} \frac{1}{KV_0^2} \left[[1 + 3KV_0^2 x]^{\frac{3}{2}} - 1 \right]$$

temps en fonction de x;

4° $$cF = \frac{3}{2} K \frac{v^4 \cos^3 \tau}{\cos^2 \alpha}.$$

résistance de l'air.

On voit que la résistance de l'air ne dépend pas seulement, en un point, de la vitesse v, mais aussi de l'inclinaison τ, et de l'inclinaison α à l'origine. On pourrait exprimer $\cos \tau$ en fonction de v, ce qui introduirait une fonction de α et de V_0 dans l'expression de cF.

La trajectoire de Piton-Bressant altère donc la loi de résistance ; dans le cas de τ et α assez petits pour que les deux cosinus soient sensiblement égaux à l'unité, l'équation de Piton-Bressant suppose une résistance $cF = \frac{3}{2} Kv^4$, c'est-à-dire biquadratique.

99. Application à une trajectoire hyperbolique. — On a souvent proposé depuis Newton, qui indiqua le premier les analogies des deux courbes, d'assimiler la courbe balistique à une hyperbole dont une asymptote serait verticale et qui aurait pour équation

$$y = \frac{b}{a}\,\frac{ax - x^2}{b - x}\,\operatorname{tg}\alpha$$

a et b étant des constantes.

On calculera

$$y' = \frac{b}{a}\operatorname{tg}\alpha - \frac{b^2}{a}(b-a)\,\frac{1}{(b-x)^2}\,\operatorname{tg}\alpha$$

$$y'' = -2\,\frac{b^2}{a}\,\frac{(b-a)}{(b-x)^3}\,\operatorname{tg}\alpha$$

$$y''' = -6\,\frac{b^2}{a}\,\frac{(b-a)}{(b-x)^4}\,\operatorname{tg}\alpha$$

On en déduira :

1° $$\operatorname{tg}\tau = \frac{b}{a}\left[1 - \frac{b(b-a)}{(b-x)^2}\right]\operatorname{tg}\alpha$$

inclinaison en fonction de x ;

2° $$u^2 = \frac{ga(b-x)^3}{2b^2(b-a)\operatorname{tg}\alpha}$$

vitesse horizontale en fonction de x ;

3° $$t = \frac{2}{b}\left(\frac{b}{(b-x)^{\frac{1}{2}}} - 1\right)\sqrt{\frac{2b^2}{ag}(b-a)\operatorname{tg}\alpha}$$

temps en fonction de x.

4° Pour calculer la *résistance de l'air*, on écrira :

$$cF = -\frac{y'''}{2g}\,\frac{u^4}{\cos\tau}\,.$$

Remplaçant y''' et u^4 par leurs valeurs, puis $(b - x)^2$ par sa valeur en fonction de $\operatorname{tg}\tau$, on arrivera aisément à l'expression

$$cF = \frac{3}{4} ag \frac{1}{(b \operatorname{tg} \alpha - a \operatorname{tg} \tau) \cos \tau}$$

L'expression de cF ne contient donc pas v explicitement; elle dépend de l'inclinaison actuelle τ, de l'inclinaison initiale α et des deux constantes a et b. Celles-ci ne sont d'ailleurs pas indépendantes, car à l'origine, on a

$$u_0^2 = \frac{gab}{2(b - a) \operatorname{tg} a} \qquad \text{d'où} \qquad \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{g}{V_0^2 \sin 2\alpha}$$

On pourrait remplacer dans cF, $\cos \tau$ et $\operatorname{tg} \tau$ par leurs expressions en fonction de v, mais cF contiendra toujours, outre cette variable, les constantes α et V_0 de l'origine.

100. **Exercices.** — 1° Étant donnée la trajectoire du 4e degré

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2 V_0^2 \cos^2 \alpha} \left(1 + ax + 3 \frac{a^2}{8} x^2\right)$$

(a étant une constante) résoudre les problèmes analogues à ceux du n° 98 pour la trajectoire de Piton-Bressant. Montrer que la résistance de l'air que suppose cette équation est de la forme

$$cF = \frac{3}{2} a \frac{v^3 \cos^2 \tau}{V_0 \cos \alpha}$$

2° Étant donnée la trajectoire du 4e degré

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2 V_0^2 \cos^2 \alpha} (1 + ax + bx^2)$$

(a et b étant des constantes),

montrer que la résistance de l'air a pour expression

$$cF = \frac{3}{2} \frac{v^3 \cos^2 \tau}{u_0^2} \sqrt{\left(a^2 - \frac{8}{3} b\right) u^2 + \frac{8}{3} b u_0}$$

3° L'équation différentielle de la trajectoire est la suivante :

$$y''' (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} + 2 \frac{c}{g} y''^2 F \left(\sqrt{-g \frac{1 + y'^2}{y''}}\right) = 0.$$

Si $cF(v) = b_4 v^4$, elle se réduit à

$$y''' + 2 b_4 g (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} = 0.$$

101. **Deuxième problème balistique inverse. On se donne l'hodographe.** — Si on se donne $v = \Psi(\tau)$, les autres éléments seront fournis (90) par les équations :

$$dt = -\frac{1}{g} \Psi(\tau) \frac{d\tau}{\cos \tau}; \quad dx = -\frac{1}{g} \overline{\Psi(\tau)}^2 d\tau;$$

$$dy = -\frac{1}{g} \overline{\Psi(\tau)}^2 \operatorname{tg} \tau \, d\tau$$

L'hodographe $\quad \dfrac{d(v \cos \tau)}{d\tau} = \dfrac{c}{g} vF$

étant développé sous la forme

$$\frac{cF}{g} = \sin \tau - \frac{\cos \tau}{v} \frac{dv}{d\tau}$$

on voit que la fonction F sera déterminée par la relation

$$\frac{cF}{g} = \sin \tau - \frac{\Psi'(\tau)}{\Psi(\tau)} \cos \tau$$

qui en général contiendra dans le second membre les données à l'origine V_0 et α, parce que l'expression $v = \Psi(\tau)$ les contient elle-même.

a) Prenons comme premier exemple l'intégrale de l'hodographe sous la forme $\cos\tau = h^n v^n$; h^n est une constante qui est telle que $\cos\alpha = h^n V_0^n$.

On a
$$-\sin\tau = nh^n v^{n-1}\frac{dv}{d\tau}$$

et par suite la valeur de $\frac{cF}{g}$ est :

$$\frac{cF}{g} = \frac{n+1}{n}\sqrt{1-(hv)^{2n}}$$

ou

$$\frac{cF}{g} = \frac{n+1}{n}\sqrt{1-\left(\frac{v}{V_0}\right)^{2n}\cos^2\alpha}$$

1° Faisons $n = 2$. On aura $\cos\tau = h^2v^2$; mais l'équation intrinsèque de la trajectoire (89)

$$\frac{v^2}{r} = -g\cos\tau$$

fait voir que

$$r = -\frac{1}{gh^2}$$

c'est-à-dire qu'ici r est constant. La trajectoire sera donc une circonférence, si la résistance de l'air est telle que :

$$\frac{cF}{g} = \frac{3}{2}\sqrt{1-\left(\frac{v}{V_0}\right)^4\cos^2\alpha}$$

2° Faisons $n = -1$; on trouve $\frac{cF}{g} = 0$; c'est bien le cas du vide, puisque l'hypothèse $n = -1$ revient à poser $v\cos\tau =$ constante.

b) Comme deuxième exemple, cherchons quelle loi de résistance suppose l'intégrale de l'hodographe :

$$v \cos(\theta + \tau) = q, \qquad \theta \text{ et } q \text{ étant des constantes.}$$

On a, dans la formule générale : $\Psi(\tau) = \dfrac{q}{\cos(\theta + \tau)}$

d'où
$$\Psi'(\tau) = q \frac{\sin(\theta + \tau)}{\cos^2(\theta + \tau)}.$$

Donc l'expression

$$\frac{cF}{g} = \sin\tau - \frac{\Psi'(\tau)}{\Psi(\tau)} \cos\tau$$

devient :

$$\frac{cF}{g} = \sin\tau - \frac{\sin(\theta + \tau)}{\cos(\theta + \tau)} \cos\tau = -\frac{\sin\theta}{\cos(\theta + \tau)}.$$

Par suite :
$$\frac{cF}{g} = \left(-\frac{\sin\theta}{q}\right) v.$$

La *résistance est proportionnelle à la simple vitesse.*

On arrive directement à ce résultat en remarquant que l'équation $v \cos(\theta + \tau) = q$ représente une droite (92).

c) Comme troisième exemple, chercher la loi de résistance qui donnerait comme hodographe une conique rapportée à son foyer.

La conique ayant l'équation :

$$v = \frac{a}{1 + e\cos(\theta + \tau)}$$

(a, e et θ sont des constantes) on trouve :

$$\frac{cF}{g} = \frac{v}{a}(\sin\tau - e\sin\theta).$$

CHAPITRE V

LES THÉORÈMES GÉNÉRAUX DE LA BALISTIQUE EXTÉRIEURE

§ 1. — Étude de l'hodographe

102. **Objet du chapitre.** — Quand on suppose, conformément aux hypothèses faites pour l'établissement des équations différentielles du mouvement principal, que la résistance de l'air est *tangentielle* et qu'elle ne dépend que de la vitesse de translation du centre de gravité du projectile, on peut démontrer un certain nombre de propriétés qui appartiennent à toute trajectoire, quelle que soit la loi de résistance de l'air.

Ces propriétés résultent de la discussion directe des équations différentielles du mouvement (88)

$$(1)\quad \frac{d(v\cos\tau)}{d\tau} = \frac{c}{g}\,v\mathrm{F}, \qquad (3)\quad dx = -\frac{v^2}{g}\,d\tau,$$

$$(2)\quad dt = -\frac{v}{g}\,\frac{d\tau}{\cos\tau}, \qquad (4)\quad dy = -\frac{v^2}{g}\,\mathrm{tg}\,\tau\,d\tau.$$

Un certain nombre des théorèmes généraux de la Balistique Extérieure, qui résultent de cette discussion, sont dus à de Saint-Robert qui les a publiés au tome I (Balistique) de ses Mémoires scientifiques (1872).

« On sait bien que la résistance est une fonction de la vitesse ; mais la seule chose qu'on puisse admettre *a priori* sur la nature de cette fonction est qu'elle va en croissant avec les valeurs croissantes de la variable. C'est pourquoi, sans adopter aucune hypothèse spéciale sur la résistance du milieu, il serait utile de discuter la trajectoire lorsqu'on suppose seulement que la forme de la fonction qui exprime la résistance en fonction de la vitesse, est telle qu'elle croît progressivement avec la variable et qu'elle converge vers l'infini en même temps que celle-ci. » (de Saint-Robert, t. I, p. 68.)

On admettra donc que l'accélération $cF(v)$ de la résistance de l'air est une fonction continue de la vitesse telle qu'on ait :

$$F'(v) > 0, \qquad F(\infty) = \infty.$$

Pour $v = 0$, on peut avoir $cF(0) > g$ ou $cF(0) = g$ ou $cF(0) < g$ c'est-à-dire que la résistance peut être telle que, pour une vitesse infiniment petite sa valeur soit plus grande que le poids du projectile, ou égale à celui-ci, ou plus faible que lui. Dans le cas où la résistance ne contient pas de terme de frottement, on a $F(0) = 0$.

103. Équation et tangente de l'hodographe. — La discussion de l'hodographe, d'après son équation différentielle, constitue l'introduction naturelle à l'étude des propriétés générales de la trajectoire, de même que son intégration constitue le premier pas pour obtenir la solution du problème balistique.

L'hodographe est une courbe exprimée en coor-

données polaires (v, τ) par l'équation différentielle

$$\frac{d(v\cos\tau)}{d\tau} = \frac{c}{g}\,v\mathrm{F}$$

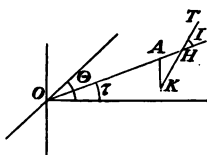


Fig. 44.

que nous prendrons ici sous la forme développée

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{v}{\cos\tau}\left(\frac{c\mathrm{F}}{g} + \sin\tau\right)$$

Étant donnée une courbe en coordonnées polaires (v, τ), la tangente en un point est déterminée par la valeur de l'angle I qui est tel que : $\operatorname{tg} \mathrm{I} = \dfrac{v}{\left(\dfrac{dv}{d\tau}\right)}$

ou

$$\operatorname{tg} \mathrm{I} = \frac{v\,d\tau}{dv}.$$

On a donc, dans le cas de l'hodographe :

$$\operatorname{tg} \mathrm{I} = \frac{g\cos\tau}{c\mathrm{F} + g\sin\tau}.$$

On sait (91) que l'on construit géométriquement la tangente en H à l'hodographe en prenant HA $= c\mathrm{F}$ et AK $= g$, et en joignant HK.

104. **Théorème I.** — *Pour $v = \infty$, l'angle τ prend une valeur différente de $\pm \frac{\pi}{2}$.*

Écrivons l'équation différentielle de l'hodographe sous la forme

$$\frac{g}{c}\,\frac{dv}{v\mathrm{F}} = \frac{d\tau}{\cos\tau}\left(1 + \frac{g}{c\mathrm{F}}\sin\tau\right)$$

et intégrons à partir d'un point quelconque (V_0, α),

où V_0 soit déjà très grand, jusqu'au point τ où v deviendra infini. On a

$$\frac{1}{c}\int_{\infty}^{V_0} \frac{gdv}{vF} = \int_{\tau}^{\alpha} \left(1 + \frac{g \sin\tau}{cF}\right) \frac{d\tau}{\cos\tau}.$$

Mais le rapport $\frac{g \sin\tau}{cF}$ ne devient jamais infini dans les limites de l'intégration ; prenons donc une constante h comme valeur moyenne du terme $\left(1 + \frac{g \sin\tau}{cF}\right)$. On aura :

$$(1) \qquad \frac{1}{c}\int_{\infty}^{V_0} \frac{gdv}{vF} = h \int_{\tau}^{\alpha} \frac{d\tau}{\cos\tau}.$$

Or le premier membre de cette égalité reste toujours fini. Répétant, en effet, le raisonnement fait au n° 51, posons, pour les très grandes valeurs de v :

$F(v) = v^{n'}[a' + b'\psi(v)]$, n' étant un exposant tel que $v^{-n'}F(v)$ ait une valeur finie pour $v = \infty$; la fonction $\psi(v)$ tend par conséquent vers zéro.

On aura ainsi, à la limite

$$\int_{\infty}^{V_0} \frac{gdv}{vF} = \int_{\infty}^{V_0} \frac{gdv}{a'v^{n'+1}} = -\frac{g}{n'a'}\frac{1}{V_0^{n'}}$$

c'est-à-dire une quantité finie si $n' > 0$.

Or, si le premier membre de l'intégrale (1) conserve une valeur finie, il en est de même du second qui, intégré, donne :

$$-h \operatorname{Log} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2}\right) + h \operatorname{Log} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right).$$

L'angle τ ne pourra donc prendre ni la valeur $+\frac{\pi}{2}$,

ni la valeur $-\frac{\pi}{2}$ qui rendraient l'une et l'autre infini le terme h Log tg $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\tau}{2}\right)$.

Pour $v=\infty$, *l'angle* τ *a donc une limite que nous désignerons par* Θ *et qui est différente de* $+\frac{\pi}{2}$ *et de* $-\frac{\pi}{2}$.

[La démonstration est en défaut si $n'=0$, c'est-à-dire si la fonction F se réduit à une constante. On peut avoir $\Theta=\pm\frac{\pi}{2}$ dans cette hypothèse spéciale].

Faisons, dans le cas général, pour fixer les idées, $\alpha=0$, on aura :

$$\int_{\infty}^{V_0}\frac{g\,dv}{v\mathrm{F}}=-h\ \mathrm{Log\ tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\tau}{2}\right).$$

Le premier membre tend, pour $v=\infty$, vers une limite finie M. Or il existe deux valeurs de τ telles que tg $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\tau}{2}\right)$ ait une même valeur $e^{-\frac{\mathrm{M}}{h}}$. Ces deux valeurs différent de π. Donc si Θ est l'angle limite défini plus haut, l'angle $(\Theta+\pi)$ sera *un second angle correspondant à une vitesse infinie. Les deux directions ainsi définies sont opposées.*

105. **Théorème II.** — *Pour* $\tau=-\frac{\pi}{2}$, *la vitesse* v *tend vers une limite* v' *telle que* $c\mathrm{F}(v')=g$.

Écrivons l'hodographe

$$\frac{dv}{v}=\left(\frac{c\mathrm{F}}{g}+\sin\tau\right)\frac{d\tau}{\cos\tau}.$$

Comme, d'après le théorème précédent, v ne devient jamais infini, dans cette région, on pourra entre α très

voisin de $-\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$, remplacer $\left(\frac{cF}{g}+\sin\tau\right)$ par une valeur moyenne k.

Intégrant alors l'équation $\frac{dv}{v}=k\frac{d\tau}{\cos\tau}$, on aura

$$\frac{v}{V_0}=\frac{\operatorname{tg}^k\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\tau}{2}\right)}{\operatorname{tg}^k\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Mais $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\tau}{2}\right)$, pour $\tau=-\frac{\pi}{2}$, devient égal à zéro; comme, d'après le théorème précédent, v ne peut devenir infini, il faut que k soit nul ou positif. Mais cette dernière hypothèse est en général impossible, car v serait nul; le projectile s'arrêterait donc, *sollicité cependant par la gravité, la résistance* $F(v)$ *devenant nulle*. Cette circonstance étant impossible, on en conclut que k tend vers zéro, ou que $\left(\frac{cF}{g}+\sin\tau\right)$ tend vers zéro; comme $\sin\tau=-1$, on voit que la vitesse v tend vers une limite v' telle que $cF(v')=g$. La vitesse v' est la *vitesse terminale* déjà rencontrée (67).

Cas de $cF(0)\geqq g$. La démonstration précédente est en défaut lorsque, pour une vitesse nulle, il existe dans l'expression de la résistance un terme de frottement constant, dont la grandeur devient égale ou supérieure à celle de la gravité g. Alors la vitesse terminale devient nulle. C'est le cas représenté par $cF_0\geqq g$.

Dans le cas d'un terme constant dans la résistance, mais tel que $cF_0<g$, la démonstration subsiste et la vitesse terminale est égale à v', vitesse telle que $cF(v')=g$.

106. **Théorème III.** — *La vitesse du projectile passe par un minimum pour un angle négatif donné par l'équation*

$$\frac{cF(v_m)}{g} + \sin \tau_m = 0.$$

Suivons les variations de la vitesse v depuis la valeur ∞ qu'elle admet pour $\tau = \Theta$ jusqu'à la valeur v' qui correspond à $\tau = -\frac{\pi}{2}$.

1° Tant que $\sin \tau$ sera positif, le deuxième membre de la relation $\frac{dv}{d\tau} = \frac{v}{\cos \tau}\left(\frac{cF}{g} + \sin \tau\right)$ sera positif; dv et $d\tau$ seront de même signe et la vitesse v décroîtra. Par suite, sur la branche ascendante de la trajectoire où τ est toujours positif, la vitesse v décroîtra depuis l'origine (α, V_0) jusqu'au sommet de la trajectoire où $\tau = 0$ et $v = V_s$.

2° Au delà du sommet, τ devient négatif et il en est de même de $\sin \tau$; $\sin \tau$ est donc une quantité négative qui augmente (en valeur absolue) à partir du sommet où elle a la valeur zéro. A ce sommet, la vitesse étant V_s, la résistante $cF(V_s)$ qui est nécessairement positive est plus grande que $\sin \tau$. Par suite, sur un petit parcours tout au moins, $cF(v)$ sera plus grand que $\sin \tau$ qui part de zéro; $\frac{dv}{d\tau}$ restera positif et v continuera à décroître une fois le sommet franchi.

cF décroîtra avec v, tandis que $\sin \tau$ augmentera en valeur absolue. Il arrivera donc un moment où, pour un certain point défini par la vitesse v_m

et par l'inclinaison τ_m de la tangente, on aura :

$$g \sin \tau_m + cF(v_m) = 0$$

et par suite $\quad \dfrac{dv}{d\tau} = 0.$

C'est la condition d'un *maximum* ou d'un *minimum* de v.

3° D'après le raisonnement qui a été fait, il s'agit évidemment d'un *minimum*. On peut d'ailleurs vérifier analytiquement le fait ; en différentiant l'équation qui donne $\dfrac{dv}{d\tau}$, on aura :

$$\frac{d^2v}{d\tau^2} = \frac{1}{\cos\tau}\frac{dv}{d\tau}\left(\frac{cF}{g} + \sin\tau + \frac{cvF'}{g}\right) + v\left[1 + \left(\frac{cF}{g} + \sin\tau\right)\frac{\sin\tau}{\cos^2\tau}\right]$$

qui, au point (v_m, τ_m) où $\dfrac{dv}{d\tau} = 0$, donne

$$\frac{d^2v}{d\tau^2} = v_m.$$

C'est une quantité essentiellement positive ; il s'agit donc bien d'un *minimum* de vitesse. Ce minimum est d'ailleurs unique, car $\dfrac{d^2v}{d\tau^2}$ ne peut changer de signe pour une valeur qui annulerait $\dfrac{dv}{d\tau} = 0$.

4° La vitesse v_m minimum est nécessairement plus petite que la vitesse terminale v' puisqu'on a :

$$\frac{cF(v_m)}{g} = -\sin\tau \qquad \text{et} \qquad \frac{cF(v')}{g} = 1.$$

A partir du point (v_m, τ_m), cF croît de même que $\sin\tau$,

sans que $\frac{dv}{d\tau}$ puisse, ainsi qu'il a été dit, s'annuler de nouveau.

Lorsque $\tau = -\frac{\pi}{2}$, la vitesse v deviendra égale à la vitesse terminale v'.

107. **Discussion.** — En vue de discuter les conditions d'existence du minimum de v, considérons les deux équations auxquelles v_m et τ_m doivent satisfaire simultanément :

$$g \sin \tau_m + cF(v_m) = 0$$

d'une part, et l'hodographe de l'autre, qu'on écrira :

$$\frac{d(v \cos \tau)}{v \cos \tau} = \frac{cF}{g} \frac{d\tau}{\cos \tau}.$$

Intégrons cette équation différentielle à partir du sommet $(V_s, 0)$ jusqu'au point de vitesse minimum (v_m, τ_m). Il viendra :

$$\text{Log} \frac{v_m \cos \tau_m}{V_s} = \int_0^{\tau_m} \frac{cF}{g} \frac{d\tau}{\cos \tau}.$$

Entre V_s et v_m, la vitesse v diminue ; le rapport $\frac{cF}{g}$ conserve toujours une valeur finie. Soit k une valeur moyenne de ce rapport entre ses deux valeurs extrêmes. On sait que l'intégrale pourra s'écrire :

$$\text{Log} \frac{v_m \cos \tau_m}{V_s} = k \int_0^{\tau_m} \frac{d\tau}{\cos \tau}$$

et comme on a

$$\int_0^{\tau} \frac{d\tau}{\cos \tau} = \text{Log tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2}\right)$$

on aura :

$$\text{Log} \frac{v_m \cos \tau_m}{V_s} = k \text{ Log tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau_m}{2}\right).$$

ou bien :

$$v_m = \frac{V_s}{\cos \tau_m}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau_m}{2}\right)\right]^k$$

ce qu'on peut écrire [1] :

$$v_m = V_s\,(1 - \sin \tau_m)^{-k} \cos^{k-1} \tau_m.$$

Les deux relations qui définissent le point (v_m, τ_m), savoir :

(α) $g \sin \tau_m + cF(v_m) = 0$, condition du minimum,

(β) $v_m = V_s\,(1 - \sin \tau_m)^{-k} \cos^{k-1} \tau_m$, intégrale de l'hodographe,

doivent être compatibles.

a) *Supposons* $\tau_m = 0$. L'équation (α) exige ou $c = 0$ ou $F(v_m) = 0$.

Si $c = 0$, on est dans le cas du vide ; la seconde équation donne $v_m = V_s$. Le *minimum de vitesse* a lieu au sommet de la trajectoire.

Si $F(v_m) = 0$, il en résulte que $v_m = 0$ (à moins que la résistance $F(v)$ ne contienne une constante, auquel cas v_m ne peut être égal à zéro). Si $v_m = 0$ la deuxième relation, où on fait $\tau_m = 0$, donne $V_s = 0$. La vitesse au sommet étant nulle, on se trouve dans le cas du mouvement *vertical ascendant*.

b) *Supposons* $\tau_m = -\frac{\pi}{2}$. L'équation (α) donne alors

[1] On a, en effet : $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2}\right) = \frac{1 + \operatorname{tg}\frac{\tau}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\tau}{2}}$, puisque $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$.

Mais $\operatorname{tg}\frac{\tau}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\tau}{1 + \cos\tau}} = \frac{1 - \cos\tau}{\sin\tau}$.

Donc : $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2}\right) = \frac{\sin\tau + (1 - \cos\tau)}{\sin\tau - (1 - \cos\tau)} = \frac{[\sin\tau + 1 - \cos\tau]^2}{\sin^2\tau - (1 - \cos\tau)^2}$

$$= \frac{(1 - \cos\tau)[2 + 2\sin\tau]}{2(1 - \cos\tau)\cos\tau} = \frac{1 + \sin\tau}{\cos\tau} = \frac{\cos\tau}{1 - \sin\tau}$$

$\frac{cF(v_m)}{g} = 1$. Comme $V_s > v_m$, puisque v diminue à partir du sommet, on a $\frac{cF(V_s)}{g} > 1$ et par suite $k > 1$ puisque k est une valeur moyenne entre $\frac{cF(V_s)}{g}$ et $\frac{cF(v_m)}{g}$.

Mais si $k > 1$, le second membre de l'équation (β) pour $\sin \tau_m = -1$, devient $\frac{1}{2^k} V_s \cos^{k-1} \tau_m$ c'est-à-dire zéro, puisque $\tau_m = -\frac{\pi}{2}$.

On aura donc $v_m = 0$, ce qui est incompatible avec $\frac{cF(v_m)}{g} = 1$ à moins que 1° $c = \infty$, si $F(v) = 0$ (mouvement impossible) ou que 2° la résistance ne contienne un terme constant $F(v) = a + \psi(v)$ tel que $\frac{cF(0)}{g} \geqq 1$.

En *résumé*, dans la trajectoire atmosphérique, le minimum de la vitesse se trouve sur la branche descendante en un point (v_m, τ_m) qui n'est, *en général*, ni le sommet, ni l'extrémité verticale de cette branche. Ce minimum satisfait à la condition

$$g \sin \tau_m + cF(v_m) = 0.$$

108. **Tangentes en différents points de l'hodographe**. — De l'équation établie précédemment (103).

$$\operatorname{tg} I = \frac{g \cos \tau}{cF + g \sin \tau},$$

on déduit immédiatement les propriétés qui suivent.

a) Pour $v = \infty$, on a $cF = \infty$, donc $I = 0$. L'hodographe a pour direction limite à l'infini une droite faisant un angle Θ avec l'horizontale et passant par l'origine.

b) D'après ce qui a été démontré précédemment (104) pour un angle $(\pi + \Theta)$, on a encore $v = \infty$; la courbe

a donc un point à l'infini dans la direction directement opposée à la première.

c) Au sommet de la trajectoire où $\tau = 0$ et $v = V_s$,

on a $$\operatorname{tg} I = \frac{g}{cF(V_s)}$$

ou encore $$\operatorname{tg} I = \frac{F(v')}{F(V_s)}, \quad \text{puisque} \quad \frac{cF(v')}{g} = 1$$

d) La tangente au point situé en amont du point de vitesse minimum et où la vitesse est égale à la vitesse terminale v', va passer par le point $\left(-\frac{\pi}{2}, v'\right)$ de l'hodographe, car

$$\operatorname{tg} I = \frac{\cos\tau}{1 + \sin\tau} \quad \text{d'où} \quad I = \frac{\pi}{4} - \frac{\tau}{2} \qquad (107)$$

e) Au point de vitesse minimum, le dénominateur s'annule ; tg I devient infini et par suite le rayon vecteur est normal à l'hodographe.

f) Au point $\left(-\frac{\pi}{2}, v'\right)$, tg I se présente sous la forme $\frac{0}{0}$ puisque $\cos\tau = 0$ et $\sin\tau = -1$, avec $\frac{cF(v')}{g} = 1$.

Cherchons la vraie valeur en prenant la dérivée des deux termes du rapport $\frac{1}{v}\frac{dv}{d\tau} = \frac{cF + g\sin\tau}{g\cos\tau}$;

on a :
$$\frac{1}{v'}\lim.\frac{dv}{d\tau} = \frac{cF'\lim.\frac{dv}{d\tau} + g\cos\tau}{-g\sin\tau}$$

et cette expression, au point $\left(-\frac{\pi}{2}, v'\right)$ se réduit à

$$\frac{1}{v'}\lim.\frac{dv}{d\tau} = \frac{cF'}{g}\lim.\frac{dv}{d\tau}.$$

Cette équation ne peut être satisfaite que par l'une ou l'autre des hypothèses suivantes :

$$\lim. \frac{dv}{d\tau} = 0, \quad \lim. \frac{dv}{d\tau} = \infty, \quad \frac{1}{v'} = \frac{cF'}{g}.$$

Dans ce dernier cas, comme au point $\left(-\frac{\pi}{2}, v'\right)$ on a aussi $\frac{cF}{g} = 1$, on en déduit $F = v'F'$, ce qui exige que dans le voisinage de la vitesse terminale v', la résistance soit proportionnelle à la première puissance de la vitesse.

On sait que, dans ce cas (92), l'hodographe est une droite inclinée sur la verticale, dont la direction dépend des conditions initiales du mouvement.

g) Pour la discussion des deux autres cas où $\frac{dv}{d\tau}$ a pour limite soit zéro, soit l'infini, nous procéderons au calcul qui suit.

Au voisinage du point $\left(-\frac{\pi}{2}, v'\right)$, posons $\tau = -\frac{\pi}{2} + \theta$ et $v = v' - \varepsilon$. L'équation de l'hodographe développée

$$\cos\tau \frac{dv}{d\tau} - v \sin\tau = \frac{c}{g} vF,$$

pourra s'écrire alors, en remplaçant $\cos\tau$ par θ et $\sin\tau$ par -1 :

$$-\theta \frac{d\varepsilon}{d\theta} + (v' - \varepsilon) = \frac{c}{g}(v' - \varepsilon) F(v' - \varepsilon).$$

Développant F par la formule de Taylor et remarquant que $\frac{c}{g} F(v') = 1$, et que $\frac{vF'}{F} = n$, il viendra :

$$\frac{d\varepsilon}{d\theta} = n\frac{\varepsilon}{\theta} \qquad \text{d'où} \qquad \varepsilon = a\theta^n,$$

a étant une constante.

Donc la tangente au point $\left(-\frac{\pi}{2}, v'\right)$ aura pour expression

$$\frac{d\varepsilon}{d\theta} = an\theta^{n-1}.$$

Par suite, n étant l'exposant représentatif de la fonction $F(v)$ au voisinage de $v = v'$, la tangente à l'hodographe au point $\left(-\frac{\pi}{2}, v'\right)$

si $n > 1$ est *horizontale.*

$n = 1$ est *inclinée.*

$n < 1$ est *verticale.*

109. **Points d'inflexion de l'hodographe.** — Dans une courbe en coordonnées polaires $f(v,\tau) = 0$, le rayon de courbure est défini par la relation :

$$R = \left[v^2 + \left(\frac{dv}{d\tau}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} \left[v^2 + 2\left(\frac{dv}{d\tau}\right)^2 - v\frac{d^2v}{d\tau^2}\right]^{-1}$$

et les points d'inflexion seront déterminés :

1° Par les valeurs qui rendent $\frac{dv}{d\tau}$ infini ; en effet $\frac{dv}{d\tau}$ figure au numérateur à la puissance 3 et au dénominateur à la puissance 2 seulement.

2° Par les valeurs qui rendent v infini, et pour la même raison.

3° Enfin par les valeurs qui annulent le dénominateur.

En tenant compte de la valeur de $\frac{d^2v}{d\tau^2}$ calculée au nº 106, le dénominateur prend la forme

$$\frac{c}{g}(vF' - F)\left(\sin\tau + \frac{c}{g}F\right)\frac{1}{\cos^2\tau}$$

et cette quantité s'annule :

a) Si $c = 0$ (*cas du vide*) ; l'hodographe est en effet une verticale, présentant un point d'inflexion continu.

b) Si $(vF' - F = 0)$, c'est-à-dire chaque fois que la courbe passe par un point de la fonction $F(v)$ où celle-ci devient proportionnelle à la simple vitesse.

c) Si $\left(\sin\tau + \frac{c}{g} = 0\right)$, c'est-à-dire aux points de vitesse minimum de l'hodographe.

d) Au point $\left(-\frac{\pi}{2}, v'\right)$ l'expression se présente sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$ par le facteur $\left(\sin\tau + \frac{cF}{g}\right)\frac{1}{\cos^2\tau}$. Mais il est possible de lever cette indétermination en remarquant que, chaque fois que le dénominateur du rayon de courbure R s'annule par l'annulation d'un des facteurs $(vF' - F)$ ou $\left(\sin\tau + \frac{c}{g}F\right)$, le rayon de courbure R change de signe. Donc pour déterminer le signe du rayon de courbure au point $\left(-\frac{\pi}{2}, v'\right)$ il suffira de savoir quel est le sens de la courbure après le passage du dernier point singulier que l'on aura rencontré.

110. **Forme générale de l'hodographe**. — Les théorèmes précédents permettent de donner le tracé général de l'hodographe ; mais il faut distinguer plusieurs cas correspondant à des formes totalement différentes. Elles seront distinguées par le *signe du facteur* $(vF' - F)$, qui peut sur toute la trajectoire être *positif*, ou être *négatif* ou enfin être *tantôt positif, tantôt négatif*.

Comme on a : $vF' - F = (n - 1)F$,

les trois formes d'hodographe seront distinguées par la valeur de n. Le cas intermédiaire de $n = 1$ conduit au cas singulier d'un hodographe linéaire.

Première forme. — On a $n > 1$ sur toute la trajectoire. — D'après le théorème du n° 109, le seul point où il y aura un changement de courbure de l'hodographe sera celui où se produit la *vitesse minimum* définie par la relation

$$\frac{cF(v_m)}{g} + \sin \tau_m = 0.$$

Pour avoir, par conséquent, le signe de R depuis $v = \infty$ jusqu'au point de vitesse minimum, il suffit de connaître son signe au sommet.

Or on trouve, par un calcul facile, pour la valeur du rayon de courbure au point $(V_s, 0)$

$$R_s = \frac{g^2 V_s}{c^2 F_s^2} \frac{\left[1 + \left(\frac{cF_s}{g}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{1 - n}.$$

Donc, au sommet, la *concavité de la courbe est tournée du côté opposé à l'origine.*

La tangente en ce sommet a pour expression :

$$\operatorname{tg} I = \frac{g}{cF_s}.$$

L'hodographe tournera sa concavité du même côté jusqu'au point de vitesse minimum où $\frac{cF(v_m)}{g} + \sin \tau_m = 0$. Un *point d'inflexion* se produira en ce point ; puis de là au point $\left(-\frac{\pi}{2}, v'\right)$ la concavité de la courbe sera tournée du côté de l'origine.

Au point $\left(-\frac{\pi}{2}, v'\right)$ la tangente sera *horizontale* (108).

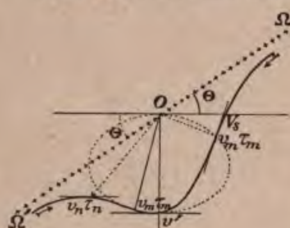
D'ailleurs, en ce point, le rayon de courbure ne sera point infini ; on le vérifie en faisant $\frac{dv}{d\tau} = 0$ dans l'expression de R ce qui ne peut rendre nul le dénominateur.

La figure ci-dessous (Forme I), représente la forme de l'hodographe pour $n > 1$.

Elle admet une asymptote d'inclinaison Θ pour le point à l'infini.

La courbe lieu des points d'inflexion et de vitesse minimum répond à l'équation :

$$\frac{cF(v)}{g} + \sin\tau = 0.$$



Forme I

Fig. 45.

Comme au point $\left(-\frac{\pi}{2}, v'\right)$ le rayon de courbure n'est pas infini, il y aura une seconde rencontre de l'hodographe et de la courbe de vitesse minimum pour un point (v_m, τ_m) au delà de $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

Il faut considérer les branches $\Omega v'$ et $\Omega' v'$ de l'hodographe comme parcourues par le projectile dans le sens des flèches ; elles appartiennent à deux trajectoires différentes possibles du même projectile, suivant les conditions initiales du mouvement (69). On voit cependant que les deux trajectoires Ω et Ω′ sont telles que le projectile arrive à la vitesse terminale v' en *augmentant toujours de vitesse*.

La branche Ω' de l'hodographe présente un point (v, τ_n) où la *vitesse verticale* $(v \sin \tau)$ passe par un minimum. Comme on a

$$\frac{d(v \sin \tau)}{d\tau} = \frac{v}{\cos \tau}\left[1 + \frac{cF}{g} \sin \tau\right]$$

le point (v_n, τ_n) sera défini par la relation :

$$1 + \frac{cF(v_n)}{g} \sin \tau_n = 0.$$

Exercice. — Démontrer qu'un tel point ne peut exister sur la branche Ω, mais existe toujours sur la branche Ω'.

Deuxième forme. — On a $n < 1$ sur toute la trajectoire. — On établira par le même raisonnement les propriétés de l'hodographe dans le cas de $n < 1$ qui sont inverses de celles du cas précédent.

a) La concavité au sommet est tournée vers l'origine.

b) Pas d'asymptote, mais une direction parabolique Θ.

c) Tangente verticale au point $\left(-\frac{\pi}{2}, v'.\right)$

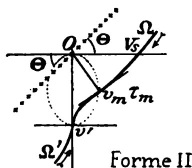


Fig. 46.

d) Inflexion en ce point.

e) Pas de point de vitesse minimum ni de point de vitesse verticale minimum sur la branche Ω'.

f) Le projectile sur la branche Ω' arrive à la vitesse v' par des vitesses qui vont sans cesse en diminuant.

La forme de l'hodographe qui correspond à l'hypothèse $n < 1$ est représentée ci-dessus. (Forme II.)

Forme composite. — n passe par la valeur 1. — Si

du point O comme centre, on décrit des cercles ayant comme rayons les valeurs des vitesses critiques pour lesquelles la fonction $F(v)$ admet comme exposant représentatif la valeur 1, l'intersection de ces courbes avec les différents *hodographes de tous les projectiles possibles* sera un point d'inflexion de ces hodographes.

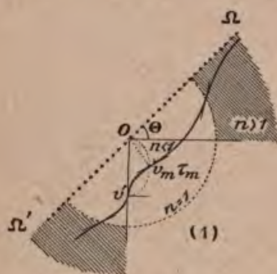


Fig. 47.

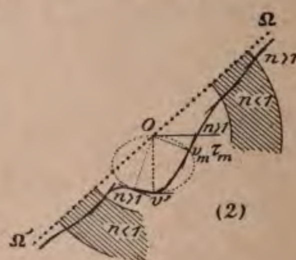


Fig. 48.

Les deux figures ci-dessus représentent le cas, la première (1) de *une* variation de courbure, la deuxième (2) de *deux* variations dues au passage de $F(v)$ par l'exposant 1.

111. Ensemble des hodographes d'un projectile. — Étant fixée une fois pour toutes la fonction $F(v)$ de la résistance de l'air, commune à tous les projectiles, un projectile particulier sera complètement déterminé au point de vue balistique : 1° par la connaissance de la *vitesse terminale* v', telle que $\frac{cF(v')}{g} = 1$, c'est-à-dire par la connaissance de son coefficient balistique ; 2° par l'angle Θ correspondant à la vitesse $v = \infty$

et qui est déterminable à l'aide des 3 données initiales (c, α, V_0) du tir (104).

La courbe des points d'inflexion et de la vitesse minimum

$$\frac{cF}{g} + \sin\tau = 0$$

est commune à tous les angles Θ, c'est-à-dire à tous les projectiles de même coefficient balistique.

Les angles Θ variant, donnent naissance à une infinité d'hodographes, qui pour $\Theta > 0$, correspondront à la branche Ω des courbes du n° 110 et pour $\Theta < 0$ correspondront à la branche Ω' des mêmes courbes.

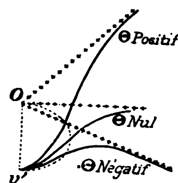


Fig. 49.

C'est cet ensemble qu'indique la figure ci-contre où on a supposé que sur tout le cours de la fonction F(v), l'exposant n était supérieur à l'unité.

Le tracé de tous ces hodographes sera d'ailleurs facilité par le théorème suivant.

111 *bis*. Théorème du C Jacob sur les trajectoires orthogonales de l'hodographe. — *On peut obtenir l'équation finie des trajectoires orthogonales de l'hodographe, quelle que soit la fonction* F(v) *de la résistance.* — Au point (v, τ) de l'hodographe, la tangente à cette courbe a pour expression (103)

$$\operatorname{tg} I = \frac{g\cos\tau}{cF + g\sin\tau}.$$

La trajectoire orthogonale au point (v, τ) a une tangente I' telle que $\operatorname{tg} I \operatorname{tg} I' = -1$.

Donc $$\operatorname{tg} I' = -\frac{cF + g\sin\tau}{g\cos\tau}$$

Mais on a toujours dans une courbe polaire

$$\operatorname{tg} I' = \frac{v d\tau}{dv}$$

et par suite dans le cas actuel

$$\frac{v d\tau}{dv} = -\frac{cF + g\sin\tau}{g\cos\tau}.$$

On en déduit :

$$\frac{cF}{g}dv + \sin\tau\, dv + v\cos\tau\, d\tau = 0$$

ou encore :

$$\frac{cF}{g}dv + d(v\sin\tau) = 0$$

et cette équation s'intégrera sous la forme :

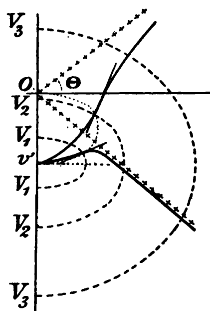


Fig. 50.

$$v\sin\tau + \frac{c}{g}\int_V^v F dv + K = 0$$

avec deux constantes V et K réductibles à une seule. Soit V la constante qui correspond à $\tau = -\frac{\pi}{2}$ dans l'intégrale : on aura $K = V$ et par suite la formule devient :

$$v\sin\tau + \frac{c}{g}\int_V^v F dv + V = 0.$$

Cette formule, en faisant varier le paramètre V, donne une série de courbes V_1, V_2, V_3... qui *sont les trajectoires*

orthogonales de tous les hodographes d'un même projectile, c = constante.

Exercices. — 1° Discuter la forme de ces trajectoires orthogonales.

2° Lieu des points de ces trajectoires où les tangentes sont verticales :

$$\frac{cF}{g} \sin \tau + 1 = 0.$$

3° Cas de $F(v) = B_n v^n$.

111 *ter*. **Théorèmes du C[l] Henry**. — Les intégrales du mouvement et leur dépendance avec l'hodographe peuvent s'interpréter géométriquement de la manière suivante.

Soient :

$$dt = -\frac{v}{g}\frac{d\tau}{\cos \tau}$$

$$dx = -\frac{v^2}{g} d\tau$$

$$dy = -\frac{v^2}{g} \operatorname{tg} \tau \, d\tau$$

Fig. 51.

les équations du mouvement et soit tracé l'hodographe H dans le plan $xo\xi$.

1° Soient deux points de l'hodographe infiniment voisins m et m'. L'aire élémentaire omm' est égale à $\frac{1}{2} v^2 d\tau$; *$g dx$ est donc le double de cette aire élémentaire.*

2° Soit oz une normale au plan $xo\xi$ de l'hodographe ; en chaque point m de cette courbe, menons une droite mM parallèle à oz et égale à tg τ ; comme $dy = dx$ tg τ, on aura $g dy = 2$Mm aire omm'. Si on mène alors MA parallèle à om, cette droite aura pour équation $z = \operatorname{tg} \tau$ et $\xi = x \operatorname{tg} \tau$: elle engendre donc le paraboloïde $z = \frac{\xi}{x}$ et on peut dire :

gdy est le double du volume élémentaire compris dans le cylindre droit qui a pour base l'hodographe, entre cet hodographe et le paraboloïde $z = \frac{\xi}{\varkappa}$

3° Projetons en $A\mu$ et $A'\mu'$ sur le plan $z\varkappa$ les 2 génératrices consécutives AM et A'M' du paraboloïde. Comme $A\mu = \varkappa$ et $AA' = dz = d \operatorname{tg} \tau = \frac{d\tau}{\cos^2 \tau}$, l'aire $AA'\mu\mu'$ sera

$$\varkappa dz = v \cos \tau \frac{d\tau}{\cos^2 \tau} = \frac{v d\tau}{\cos \tau}.$$

Donc *gdt est la projection sur le plan $z\varkappa$ de l'aire paraboïdale qui limite le volume élémentaire précédemment défini.*

En passant aux équations finies, on aura les 3 théorèmes suivants :

1° *L'aire balayée par le rayon vecteur de l'hodographe entre deux positions quelconques de ce rayon est égale à $\frac{1}{2} gx$.*

2° *Le cylindre droit qui a pour base l'aire balayée et est limité d'un côté par cette aire et de l'autre par le paraboloïde $z = \frac{\xi}{\varkappa}$ a un volume égal à $\frac{1}{2} gy$* (ce volume doit être compté positivement pour des valeurs de τ positives, négativement pour des valeurs de τ négatives).

3° *La fraction du paraboloïde qui limite le volume précédent se projette sur le plan de xz suivant une aire trapézoïdale égale à gt.*

On peut remarquer que le paraboloïde $z = \frac{\xi}{\varkappa}$ est la surface décrite par une droite parallèle au plan des $\varkappa\xi$ s'appuyant sur la normale oz à ce plan et sur la diagonale d'une face opposée d'un cube construit sur $\varkappa o \xi$.

Les théorèmes précédents montrent comment la connaissance de l'hodographe permettrait par des quadratures graphiques de déterminer les autres éléments du mouvement : c'est l'interprétation géométrique des équations du n° 90.

§ 2. — Forme générale de la trajectoire

112. **La trajectoire est une courbe plane**. — En effet, le plan vertical mené à un instant quelconque du mouvement par la tangente à la trajectoire contient tous les éléments du mouvement, c'est-à-dire la *vitesse*, la *résistance de l'air* supposée tangentielle et la *pesanteur*. Le projectile ne peut donc sortir de ce plan.

Comme des deux forces qui agissent sur le projectile, l'une, la résistance de l'air, ne peut avoir d'autre effet que de le retarder suivant la tangente et l'autre la gravité que de l'abaisser suivant une verticale, la trajectoire tournera sa concavité vers le bas, c'est-à-dire vers les y négatifs.

113. **L'inclinaison de la tangente va toujours en diminuant quand l'abscisse croît.** — En effet, on a (102) $dx = -\frac{v^2}{g} d\tau$, ce qui montre que dx et $d\tau$ sont toujours de signes contraires.

Supposons qu'à l'origine du mouvement, τ ait une valeur positive α ; α est l'*angle de projection*. Dans le sens des x croissant, τ commence à diminuer jusqu'à atteindre la valeur zéro.

Au point $\tau = 0$, correspond le *sommet* S de la trajection atmosphérique qui, dans l'hypothèse de α positif, comprend ainsi une *branche ascendante* et une *branche descendante*.

A partir du sommet, τ change de signe, devient par conséquent négatif et augmente en valeur absolue. Mais cet angle ne peut jamais dépasser la valeur $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$,

car pour $\tau = -\frac{\pi}{2}$, la vitesse serait dirigée suivant la verticale et tous les éléments du mouvement, vitesse, résistance et gravité seraient en ligne droite, de sorte que le projectile ayant atteint cette verticale ne pourrait plus la quitter.

114. **La vitesse horizontale diminue quand l'abscisse croît.** — En éliminant $d\tau$ entre les équations (1) et (3) du n° 102 il vient

$$d(v \cos \tau) = -\frac{cF}{v}\, dx.$$

Le second membre est toujours négatif si dx est positif; $d(v \cos \tau)$ étant ainsi négatif, la vitesse horizontale $u = v \cos \tau$ diminue quand l'abscisse croît.

115. **Comparaison des deux branches de la trajectoire**. — Soit une trajectoire d'origine O et de sommet S. Considérons deux points A_1 et A_2 situés sur une même horizontale (mêmes y).

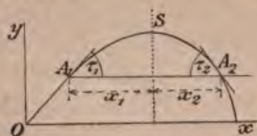


Fig. 52.

Soient v_1 la vitesse du projectile en A_1, v_2 la vitesse du projectile en A_2;

Soient τ_1 l'inclinaison de la tangente en A_1, τ_2 l'inclinaison de la tangente en A_2;

x_1 la distance horizontale de A_1 à S, x_2 la distance horizontale de A_2 à S;

s_1 l'arc de trajectoire A_1S, s_2 l'arc de trajectoire A_2S.

On a les théorèmes suivants :

1° sur les vitesses $v_1 > v_2$

2° sur les inclinaisons $\tau_1 < \tau_2$

3° sur les abscisses $x_1 > x_2$

4° sur les arcs $s_1 > s_2$.

1° — $v_1 > v_2$.

Cette propriété résulte immédiatement de l'application du théorème des forces vives; pour deux points situés à la même hauteur au-dessus du sol, le travail de la pesanteur est nul, et celui de la résistance de l'air est négatif. Ainsi on écrira :

$$\frac{1}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) = -\int_0^s cF\, ds$$

ds étant l'élément d'arc de trajectoire. Le second membre étant négatif, on aura $v_1 > v_2$. c.q.f.d.

2° — $\tau_1 < \tau_2$.

L'équation (4) du n° 102 peut s'écrire :

$$\frac{dy}{v^2 \cos^2 \tau} = -\frac{1}{g} \operatorname{tg} \tau \frac{d\tau}{\cos^2 \tau}.$$

Intégrons sur la *branche ascendante* depuis y jusqu'au sommet où $y = Y_s$. On aura :

$$(1) \quad \int_y^{Y_s} \frac{dy}{v^2 \cos^2 \tau} = -\frac{1}{g}\int_{\tau_1}^0 \operatorname{tg} \tau \frac{d\tau}{\cos^2 \tau} = \frac{1}{2g} \operatorname{tg}^2 \tau_1.$$

Intégrons sur la *branche descendante* depuis Y_s, sommet, jusqu'au point d'ordonnée y. On aura

$$\int_{Y_s}^{y} \frac{dy}{v^2 \cos^2 \tau} = -\frac{1}{g}\int_0^{\tau_2} \operatorname{tg} \tau \frac{d\tau}{\cos^2 \tau} = -\frac{1}{2g} \operatorname{tg}^2 \tau_2$$

En changeant les signes de cette dernière intégrale dans les deux membres, on écrira

$$(2) \qquad \int_{y}^{Y_s} \frac{dy}{v^2 \cos^2 \tau} = \frac{1}{2g} \operatorname{tg}^2 \tau_2$$

Mais, d'après le théorème du n° 114, la vitesse horizontale $v \cos \tau$ est plus petite en tout point de la branche descendante qu'en un autre point quelconque de la branche ascendante. Donc, chaque élément $\frac{dy}{v^2 \cos^2 \tau}$ de l'intégrale (2) est plus grand que le même élément de l'intégrale (1) et comme les limites y, Y_s sont les mêmes, l'intégrale (2) est plus grande que l'intégrale (1). Donc $\tau_2 > \tau_1$.

3° — $x_1 > x_2$.

Comme on a $dx = \frac{dy}{\operatorname{tg} \tau}$, on écrira, pour la branche ascendante :

$$x_1 = \int_{y}^{Y_s} \frac{dy}{\operatorname{tg} \tau_1}$$

et pour la branche descendante

$$x_2 = \int_{y}^{Y_s} \frac{dy}{\operatorname{tg} \tau_2}.$$

Mais puisque $\tau_2 > \tau_1$ et que les limites sont les mêmes, on aura chaque élément de la seconde plus grand que l'élément correspondant de la première : donc $x_2 < x_1$.

4° — $s_1 > s_2$.

On a $ds = \frac{dy}{\sin \tau}$.

Le raisonnement est le même que dans le cas précédent[1].

116. **Origine et point de chute**. — Les théorèmes précédents appliqués à l'*origine* et au *point de chute* s'énoncent ainsi :

1° La vitesse restante V_ω est plus petite que la vitesse initiale V_0 ;

2° L'angle de chute ω est plus grand que l'angle de projection α ;

3° L'abscisse X_s du point culminant de la trajectoire est plus grand que la moitié de la portée X.

4° L'arc qui va de l'origine au point culminant est plus grand que la moitié de l'arc total de l'origine au point de chute.

§ 3. — Branche ascendante

117. **Point Ω**. — L'origine (α, V_0) de la trajectoire définie par la bouche du canon n'est qu'un point quelconque, analytiquement parlant, et sans propriétés spéciales de cette courbe. On peut donc, en donnant à x des valeurs négatives, suivre le projectile en amont de l'origine et chercher les propriétés de la trajectoire dans cette région, analytiquement définie par la même équation.

L'équation $dx = -\dfrac{v^2}{g}\,d\tau$ (102) montre que si dx est négatif, $d\tau$ sera toujours positif; l'inclinaison aug-

[1] On ne peut établir un théorème analogue sur les temps t_1 et t_2, parce que $dt = \dfrac{dy}{v \sin \tau}$ et que pour le même y, v et $\sin \tau$ varient en sens contraire sur les deux branches.

mente donc en amont de l'origine. D'autre part l'équation de l'hodographe $\frac{du}{d\tau} = \frac{cvF}{g}$ montre que du est positif en même temps que $d\tau$. La vitesse horizontale $u = v \cos \tau$ croît donc et comme $\cos \tau$ décroît, on voit que v croîtra.

Il a été démontré (104) qu'avant d'arriver à la limite $\frac{\pi}{2}$ de l'angle τ, la vitesse v devenait infinie. Le *point* Ω de la trajectoire qui correspond à une vitesse infinie est l'extrémité de la branche ascendante et la véritable origine de la trajectoire : ce sont les propriétés de la courbe au point Ω que nous nous proposons maintenant d'étudier.

Rappelons que, par hypothèse, $F(\infty) = \infty$.

118. **Tangente au point Ω.** — Nous avons déterminé (104) la *limite* Θ de l'inclinaison τ sur l'hodographe. Cet angle Θ est aussi l'inclinaison de la tangente au point Ω de la branche ascendante.

Nous avons vu que la démonstration était basée sur l'hypothèse qu'une certaine intégrale $\int_{\infty}^{V_0} \frac{gdv}{vF}$ prise entre une limite finie et ∞, ne devenait jamais infinie : d'ailleurs cette hypothèse est réalisée lorsque, pour les très grandes vitesses, l'exposant n' qui caractérise la fonction $F(v)$ dans ces régions est plus grand que zéro.

D'une façon générale, on désigne par $\mathbf{J}(v)$ l'intégrale $-\int_{V}^{v} \frac{gdv}{vF}$.

On a donc :

$$\mathbf{J}(v) - \mathbf{J}(V_0) = -\int_{v}^{V_0} \frac{gdv}{vF}$$

et dans le cas actuel $J(\infty)$ est fini. Dans ces conditions, on énoncera le théorème suivant :

La tangente extrême de la branche ascendante au point (∞, Ω) est oblique; elle fait avec l'horizontale un angle Θ.

119. **Éléments du point Ω.** — La forme développée de l'hodographe (104)

$$\frac{g}{c}\,\frac{dv}{v\mathrm{F}} = \frac{d\tau}{\cos\tau}\left(1 + \frac{g}{c\mathrm{F}}\sin\tau\right)$$

montre que pour des valeurs très grandes de v, dans le voisinage par suite du point Ω, le facteur $\frac{g}{c\mathrm{F}}\sin\tau$ devient très petit et par suite négligeable devant l'unité.

L'hodographe tendra donc à se réduire à la forme simple

$$\frac{g}{c}\,\frac{dv}{v\mathrm{F}} = \frac{d\tau}{\cos\tau}.$$

Portons cette expression dans les équations du n° 102 :

$$dt = -\frac{v}{g}\,\frac{d\tau}{\cos\tau}; \quad dx = -\frac{v^2}{g}\,d\tau; \quad dy = -\frac{v^2}{g}\,\mathrm{tg}\,\tau\, d\tau.$$

Il vient :

$$dt = -\frac{1}{c}\,\frac{dv}{\mathrm{F}}; \quad dx = -\frac{1}{c}\,\frac{v\cos\tau}{\mathrm{F}}\,dv; \quad dy = -\frac{1}{c}\,\frac{v\sin\tau}{\mathrm{F}}\,dv.$$

1° *Temps.* — Du point (V_0, α) où V_0 est déjà assez grand pour que l'hodographe simplifié puisse être employé, au point Ω, on aura :

$$t = -\frac{1}{c}\int_{\infty}^{\mathrm{V}_0}\frac{dv}{\mathrm{F}}.$$

On a déjà rencontré la même fonction intégrale qui a été désignée par la notation $\mathbf{S}(v)$ ou $\mathbf{S}$ par abréviation (48).

$$\mathbf{S}(v) = -\int_{V}^{v} \frac{dv}{F}.$$

Donc $$t = \frac{\mathbf{S}(\infty) - \mathbf{S}(V_0)}{c}$$

Suivant que la fonction $\mathbf{S}$ *sera finie ou infinie pour* $v = \infty$, *le temps mis par le projectile pour aller du point* Ω *à un point quelconque de la trajectoire sera fini ou infini.*

2° *Abscisse.* — Intégrant entre les mêmes limites, en remarquant que $\cos\tau$ peut sortir du signe $\int$ en le remplaçant par une constante voisine de $\cos\Theta$, on aura

$$x = -\frac{1}{c}\cos(\Theta - \varepsilon)\int_{\infty}^{V_0} \frac{vdv}{F}.$$

Il s'introduit ici la fonction $\mathbf{D}(v)$ ou $\mathbf{D}$ du n° 48 définie par l'équation :

$$\mathbf{D}(v) = -\int_{V}^{v} \frac{vdv}{F}.$$

Donc $$x = \frac{\mathbf{D}(\infty) - \mathbf{D}(V_0)}{c}\cos(\Theta - \varepsilon).$$

Suivant que la fonction $\mathbf{D}$ *sera finie ou infinie pour* $v = \infty$, *l'abscisse* x *du point* Ω *sera finie ou infinie.*

3° *Ordonnée.* — On écrit immédiatement

$$y = \frac{\mathbf{D}(\infty) - \mathbf{D}(V_0)}{c}\sin(\Theta - \varepsilon).$$

L'ordonnée est finie ou infinie dans les mêmes conditions que l'abscisse.

4° *Asymptote de la branche ascendante.* — Lorsque le point Ω est rejeté à l'infini dans la direction Θ, la question se pose de savoir si la trajectoire admet une asymptote ou si elle tend seulement à prendre la direction Θ à la manière d'une parabole qui pour l' ∞ devient parallèle à son axe.

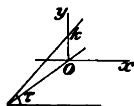


Fig. 53.

L'hodographe, au voisinage du point Ω, prend la forme (104) :

$$\frac{g}{c}\frac{dv}{v\mathrm{F}} = \frac{d\tau}{\cos\tau}$$

qui peut aussi bien s'écrire

$$\frac{d\tau}{\cos^2\tau} = \frac{g}{c}\frac{1}{\cos\tau}\frac{dv}{v\mathrm{F}}$$

Intégrant de α à τ et de V_0 à v, on aura :

$$\operatorname{tg}\tau - \operatorname{tg}\alpha = \frac{g}{c\cos(\Theta - \varepsilon)}\left[\mathbf{J}(\mathrm{V}_0) - \mathbf{J}(v)\right]$$

ou

$$\operatorname{tg}\tau = h - k\mathbf{J}(v).$$

Comme $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\tau$, on aura en intégrant une deuxième fois et remplaçant dx par $-\frac{1}{c}\cos(\Theta - \varepsilon)\frac{vdv}{\mathrm{F}}$,

$$y = hx + \frac{k}{c}\cos(\Theta - \varepsilon)\int_{\mathrm{V}_0}^{v}\mathbf{J}(v)\frac{vdv}{\mathrm{F}}.$$

Posons comme définition d'une nouvelle fonction balistique :

$$\mathbf{A}(v) = -\int_{\mathrm{V}}^{v}\mathbf{J}(v)\frac{vdv}{\mathrm{F}}.$$

on aura

$$y = hx + \frac{k'}{c}\left[\mathbf{A}(V_0) - \mathbf{A}(\infty)\right]$$

C'est l'équation d'une droite qui, à la limite, est tangente à la trajectoire au point Ω et qui coupe l'axe des y au point :

$$y = \frac{k'}{c}\left[\mathbf{A}(V_0) - \mathbf{A}(\infty)\right].$$

Suivant que la fonction **A** *sera finie ou infinie pour* $v = \infty$, *l'asymptote au point* Ω *sera à distance finie (branche hyperbolique) ou à distance infinie (branche parabolique).*

120. **Résumé.** — Ainsi, les propriétés de la trajectoire au point Ω, extrémité amont de la branche ascendante où la vitesse devient infinie, dépendent des valeurs finies ou infinies de certaines intégrales dites *fonctions balistiques de Siacci*, prises entre une vitesse finie et une vitesse infinie.

Leur définition est la suivante (V est une vitesse arbitraire) :

$$\mathbf{J}(v) = -\int_V \frac{g\,dv}{vF}; \qquad \mathbf{D}(v) = -\int_V^v \frac{v\,dv}{F};$$

$$\mathbf{S}(v) = -\int_V^v \frac{dv}{F}; \qquad \mathbf{A}(v) = -\int_V^v \mathbf{J}\,\frac{v\,dv}{F}.$$

$\mathbf{J}(\infty)$ est fini par hypothèse d'après la loi de résistance de l'air admise ($n > 0$).

La tangente au point Ω *est toujours oblique.*

Si $\mathbf{D}(\infty)$ est fini, le point Ω est à distance finie.
— infini, — — infinie.

Si $\mathbf{S}(\infty)$ est fini, le temps mis pour venir de Ω est fini.
— infini — — infini.

Si $\mathbf{A}(\infty)$ est fini, l'asymptote au point Ω est à distance finie (branche hyperbolique).

Si $\mathbf{A}(\infty)$ est infini, l'asymptote au point Ω est à distance infinie (branche parabolique).

121. **Exemple.** — Soit $F(v) = v^n[a + b\psi(v)]$, $\psi(v)$ tendant vers zéro pour $v = \infty$.

On a :

$$\mathbf{J}(v) = -\int \frac{g\,dv}{v\mathrm{F}} = -\frac{g}{a}\int \frac{dv}{v^{n+1}} = \frac{g}{na}\,\frac{1}{v^n}$$

$$\mathbf{S}(v) = -\int \frac{dv}{\mathrm{F}} = -\frac{1}{a}\int \frac{dv}{v^n} = \frac{1}{(n-1)a}\,\frac{1}{v^{n-1}}$$

$$\mathbf{D}(v) = -\int \frac{v\,dv}{\mathrm{F}} = -\frac{1}{a}\int \frac{dv}{v^{n-1}} = \frac{1}{(n-2)a}\,\frac{1}{v^{n-2}}$$

$$\mathbf{A}(v) = -\int \mathbf{J}\,\frac{v\,dv}{\mathrm{F}} = -\frac{g}{na^2}\int \frac{dv}{v^{2n-1}} = \frac{g}{n(2n-2)a^2}\,\frac{1}{v^{2n-2}}$$

On voit d'abord que n étant plus grand que zéro, c'est-à-dire $\mathrm{F}(v)$ croissant avec la vitesse, $\mathbf{J}(\infty)$ sera nul.

On peut ensuite former le tableau suivant :

n	< 1	$= 1$	< 2	$= 2$	> 2
Le point Ω est à distance. . . .	∞	∞	∞	∞	finie
Le temps T est.	∞	∞	fini	fini	fini
L'asymptote est à distance . . .	∞	∞	finie	finie	finie

§ 4. — Branche descendante.

122. **Variations de la vitesse.** — En fonction de dt, on a (87) :

$$\frac{dv}{dt} = -g\left(\frac{cF}{g} + \sin\tau\right)$$

et cette équation donne les mêmes zéros que la dérivée $\frac{dv}{d\tau}$ dont l'étude a fait l'objet du § 1 du présent chapitre.

Donc, à partir du sommet ($\tau = o$ et $v = V_s$), la vitesse v décroît ; elle passe par un minimum pour un point (v_m, τ_m) tel que : $\frac{cF(v_m)}{g} + \sin\tau_m = 0$.

La vitesse croît ensuite pour atteindre la valeur v' de la vitesse terminale, lorsque $\tau = -\frac{\pi}{2}$.

On a vu le cas d'exception (105) qui correspond à l'hypothèse $cF(0) \geqq g$.

123. **Théorème.** — *Le temps nécessaire au projectile pour atteindre la vitesse terminale v' est, en général, infini.*

On a, en effet (102) :

$$dt = -\frac{v}{g}\frac{d\tau}{\cos\tau},$$

et le temps t jusqu'à la vitesse v' sera donné, à partir de la vitesse minimum (v_m, τ_m), par la formule :

$$gt = -\int_{\tau_m}^{-\frac{\pi}{2}} v\frac{d\tau}{\cos\tau}.$$

Or v est toujours différent de zéro et de l'infini dans les limites de l'intégration ; on a donc :

$$gt > v' \int_{\tau_m}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\tau}{\cos\tau}.$$

Mais on a $\int_{\tau_m}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\tau}{\cos\tau} = \infty$, car l'intégrale en est $\text{Log tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2}\right)$. Le théorème est donc démontré.

La démonstration tombe en défaut si v' peut tendre vers zéro.

a) Si $\frac{cF(o)}{g} > 1$, le temps employé pour éteindre la vitesse, à partir d'une vitesse initiale V_0 sera

$$gt = -\int_{V_0}^{0} \frac{dv}{\frac{cF}{g} + \sin\tau}$$

et comme le dénominateur ne devient jamais nul, le *temps sera fini*. Le projectile s'arrêtera et restera immobile dans la même position.

b) Si $\frac{cF(o)}{g} = 1$, la vitesse tend également vers zéro. Soit m un exposant capable de rendre finie la fraction $\left(\frac{cF(v)}{g} - 1\right)\frac{1}{v^m}$ pour $v = o$.

Si l'on donne à l'intégrale la forme :

$$gt = -\int_{V_0}^{0} \frac{v^m}{\frac{cF}{g} + \sin\tau} \frac{dv}{v^m}$$

on en conclut *que le temps t est fini si* $m < 1$ *et infini si* $m \geqq 1$.

La forme de la fonction F est dans ce cas, par exemple :

$$\frac{cF}{g} = 1 + v^m(A_0 + A_1 v + \ldots).$$

124. **Asymptote verticale**. — Théorème. — *La branche descendante de la trajectoire admet une asymptote verticale à distance finie.*

Intégrons en effet l'équation différentielle qui donne l'abscisse $dx = -\frac{v^2}{g}d\tau$, depuis le point (v_m, τ_m) de vitesse minimum jusqu'au point $\left(-\frac{\pi}{2}, v'\right)$ de vitesse terminale; on aura en désignant par X″ l'abscisse ainsi calculée :

$$X'' = \frac{1}{g}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\tau_m} v^2 d\tau,$$

d'où on déduira, en remplaçant v par sa valeur maximum v' et par sa valeur minimum v_m, la double inégalité :

$$\frac{v_m^2}{g}\left(\tau_m + \frac{\pi}{2}\right) < X'' < \frac{v'^2}{g}\left(\tau_m + \frac{\pi}{2}\right).$$

D'ailleurs, y qui est donné par l'équation

$$y = -\frac{1}{g}\int_{\tau_m}^{-\frac{\pi}{2}} v^2 \operatorname{tg}\tau \, d\tau$$

est infini.

Donc la *branche descendante de la trajectoire est infinie, mais elle admet une asymptote à distance finie.*

Dans le cas où la vitesse v tend vers zéro, on établira facilement les théorèmes suivants.

a) Si $\frac{cF(o)}{g} > 1$, l'arc s de trajectoire définie par $ds = vdt$ s'écrira :

$$gs = -\int_{V_0}^{0} \frac{vdv}{\frac{cF}{g} + \sin\tau}$$

et sera une *quantité finie*.

x et y seront donc à distance finie : la trajectoire a un point d'arrêt, à tangente verticale.

b) Si $\frac{cF(o)}{g} = 1$ l'arc est *fini* si l'exposant m défini plus haut (123 *b*) est < 2 et *infini* si $m > 2$.

125. Rayon de courbure de la trajectoire. — THÉORÈME. — *Le rayon de courbure de la trajectoire passe par un minimum sur la branche descendante.*

Le rayon de courbure r en un point (v, τ) d'une trajectoire est donné par la formule (89) $r = \frac{v^2}{g\cos\tau}$.

1° Sur la *branche ascendante*, v diminue, tandis que $\cos\tau$ augmente ; le rayon de courbure va donc constamment en diminuant jusqu'au sommet où $r_s = \frac{V_s^2}{g}$.

2° Considérons maintenant sur la *branche descendante* un point situé au delà du point de vitesse minimum (v_m, τ_m) ; v croît et $\cos\tau$ diminue : le rayon de courbure croîtra donc. Par suite, entre le sommet et le point de vitesse minimum, les variations de r ont changé de signe et le rayon de courbure a passé par un *minimum*.

3° Pour déterminer le point où se produit ce minimum, différentions l'équation $r = \frac{v^2}{g \cos \tau}$ par rapport à t. On aura :

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{g}\left[\frac{2v}{\cos\tau}\frac{dv}{dt} + v^2\frac{\sin\tau}{\cos^2\tau}\frac{d\tau}{dt}\right]$$
$$= -\frac{v}{g\cos\tau}\left[3g\sin\tau + 2cF\right].$$

Cette équation détermine un point (v_r, τ_r) où le rayon de courbure est minimum et pour lequel on a :

$$2\,cF(v_r) + 3\,g\sin\tau_r = 0.$$

Le rayon de courbure croît ensuite jusqu'à l'infini pour $v = v'$ et $\tau = -\frac{\pi}{2}$.

126. **Trajectoire des bolides**. — Dans le précédent paragraphe et dans celui-ci nous avons suivi constamment le projectile sur la branche (Ω, V_s, v') de l'hodographe du n° 110 et jusqu'au point $-\frac{\pi}{2}$.

Mais l'hodographe comprend également la branche (v', Ω') (104) où τ conserve constamment des valeurs négatives et à laquelle correspond une portion de trajectoire qui ne rentre pas explicitement dans l'étude précédente.

Cette portion de trajectoire sera caractérisée par le fait qu'elle ne possédera pas de *sommet*, mais seulement une branche descendante, sur laquelle, pour une certaine valeur $-\Theta$, la vitesse v prendra une valeur infinie.

Les propriétés de cette trajectoire sont corrélatives de

celles de la trajectoire ordinaire à laquelle elle est associée et qu'elle complète. Ainsi le point Ω', qui correspond à une vitesse infinie sur la trajectoire sera à distance finie ou infinie suivant que la fonction **D** (∞) sera finie ou infinie (120). La considération des fonctions **S** (∞) et **A** (∞) permet également l'étude de la forme de la trajectoire en ce point.

Il y aura une *asymptote verticale* à distance finie ou un *point d'arrêt* dans les mêmes conditions qu'au n° 124.

La vitesse passera par un *minimum* ou non suivant que l'hodographe aura la forme I ou II du n° 110. La vitesse *terminale* sera v' ou o, comme il a été dit au n° 104.

Le rayon de courbure passera par un minimum défini par la même relation que ci-dessus (125).

Il existera un point où la *vitesse verticale sera minimum* dans le cas de la forme I de l'hodographe (110).

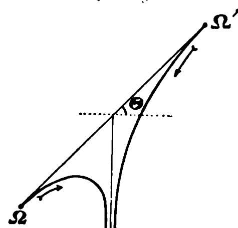


Fig. 54.

La figure ci-contre montre l'ensemble des deux trajectoires associées qu'un projectile peut décrire. La trajectoire Ω *avec sommet* est celle des projectiles lancés ordinairement par l'artillerie sous des angles positifs ou faiblement négatifs et des vitesses relativement faibles.

La trajectoire Ω' correspond à des angles de projection négatifs et des vitesses de projection très grandes ; ce sera la *trajectoire des bolides* qui rencontrent l'atmosphère terrestre avec des vitesses extrêmement considérables et sous des angles quelconques.

Remarque. — On a rencontré dans la discussion du mouvement vertical descendant (69) une courbe (v, cy) qui présente quelque analogie avec la trajectoire : la branche isolée Ω' du n° 69 où les vitesses varient de ∞ à v' dans le mouvement descendant est l'analogue de la branche Ω' de la trajectoire où les vitesses ont les mêmes variations.

Mais dans le mouvement vertical descendant, sur la branche (Ω) les vitesses vont de o à v' en restant toujours *inférieures* à v' et sur la branche Ω' les vitesses vont de ∞ à v' en restant toujours *supérieures* à v'. Au contraire dans la trajectoire atmosphérique sur la branche Ω la vitesse après avoir passé par un minimum tend vers v' en lui étant *inférieure*, et il en est de même sur la branche Ω' dans le cas de la forme I de l'hodographe (110). Dans le cas de la forme II, la vitesse tend vers v' sur la branche Ω' en lui étant *supérieure*.

127. **Exercices.** — 1. *Construire la courbe (v, t) de la branche descendante.* — Tangente en un point, minimum, point d'inflexion, asymptote horizontale.

2. *Points remarquables de la branche descendante.* — Quand on calcule une trajectoire par arcs successifs, en adoptant comme division des amplitudes égales et très petites $\Delta\tau$, on remarque que, sur la branche descendante, les valeurs des abscisses Δx, des temps Δt et des ordonnées Δy, peuvent présenter des minima ou maxima.

Etudier les circonstances où ces particularités se rencontrent.

[Cela revient à étudier les dérivées par rapport à τ de

$$\frac{dx}{d\tau} = -\frac{v^2}{g}, \qquad \frac{dt}{d\tau} = -\frac{v}{g\cos\tau}, \qquad \frac{dy}{d\tau} = -\frac{v^2}{g}\operatorname{tg}\tau.$$

On trouve que :

1° On a un minimum de $\left(\frac{dx}{d\tau}\right)$ au point (v_m, τ_m) de vitesse minimum;

2° On a un minimum de $\left(\frac{dt}{d\tau}\right)$ au point défini par la relation

$$2g \sin \tau + cF = 0.$$

Il est situé entre le sommet et le point de rayon de courbure minimum;

3° Pour étudier les variations de $\left(\frac{dy}{d\tau}\right)$ il faut considérer une équation du second degré

$$2 \sin^2 \tau + \frac{2cF}{g} \sin \tau + 1 = 0.$$

Conditions de réalité des racines, conditions pour qu'elles représentent un sinus. Il y aurait un maximum et un minimum si $\sqrt{2} < \frac{cF}{g} < \frac{3}{2}$. Ils se produiraient pour un angle τ compris entre $-30°$ et $-45°$.

Démontrer que ces conditions sont incompatibles avec l'hodographe, en raisonnant dans le cas limite où les deux racines sont égales.

En aucun cas donc, sur la *branche descendante* il ne peut exister de maximum ou de minimum pour la quantité $\left(\frac{dy}{d\tau}\right)$.]

3. *Ensemble des formules différentielles du mouvement.* — On n'a utilisé dans la discussion du présent chapitre qu'un certain nombre des combinaisons possibles des équations différentielles du mouvement.

Supposons, par exemple, qu'on admette sept variables v, u, t, τ, x, y, s; si on combine deux à deux les différentielles dv, du, dt..... sous forme de rapport, le nombre total des combinaisons sera $\frac{7.6}{1.2} = 21$ formules possibles, équations différentielles du premier ordre.

Combinant ensuite deux à deux les mêmes variables sous la forme $\frac{d^2v}{dt^2}$, ... $\frac{d^2x}{dv^2}$ ..... etc., on aura encore 21 combinaisons nouvelles d'équations différentielles du second ordre.

Former le tableau des formules auxquelles on arrive.

Démontrer : *Théorème 1*. — Dans toutes les formules où ne figurent que les trois lettres x, y, s, n'entre pas le rapport $\frac{cF}{g}$.

Théorème 2. — Dans toutes les formules où ne figurent (en plus de x, y, s) que les deux lettres t et τ, le rapport $\frac{cF}{g}$ s'introduit dans les dérivées secondes.

Théorème 3. — Quand on introduit une des deux lettres v ou u le rapport $\frac{cF}{g}$ s'introduit dans les dérivées premières, la dérivée $\frac{cF'}{g}$ de ce rapport dans les dérivées secondes.

§ 5. — Trajectoires a coefficients balistiques différents

128. **Théorème I**. — *En un point (v, τ) d'une trajectoire atmosphérique, le rayon de courbure ne dépend pas de la résistance de l'air.*

En effet, nous avons vu (89) que le rayon de courbure r est donné par l'équation $r = -\frac{v^2}{g \cos \tau}$.

Cette relation ne renferme pas la résistance de l'air cF.

Corollaire I. — Si on considère une série de projectiles ayant des coefficients balistiques différents, mais lancés du même point (V_0, α) sous le même angle de

projection α et avec la même vitesse initiale V_0, toutes les trajectoires de ces projectiles admettent le même rayon de courbure $r = -\dfrac{V_0^2}{g \cos \alpha}$ au point (V_0, α).

Corollaire II. — Parmi ces trajectoires se trouve celle du vide, correspondant à l'hypothèse $c = 0$. Cette trajectoire est celle qu'un projectile quelconque parcourrait si au point (v,τ) la résistance de l'air était tout à coup supprimée. On appelle cette trajectoire du vide au point (v,τ), *parabole de la vitesse* en ce point.

Corollaire III. — D'après le théorème I, une trajectoire quelconque est osculatrice à la parabole de la vitesse au point commun (v,τ), puisque ces deux courbes ont même rayon de courbure.

Exercices. — 1. Trouver l'équation du cercle osculateur en O à la trajectoire (V_0,α) :

$$x^2+y^2+\frac{2V_0^2}{g}(y-x\operatorname{tg}\alpha)=0$$

2. Trouver son intersection avec l'horizontale :

$$x=\frac{2V_0^2}{g}\operatorname{tg}\alpha.$$

3. Trouver son intersection avec la parabole de la vitesse en α :

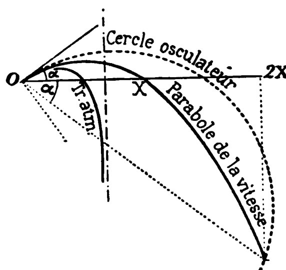


Fig. 55.

$$x=\frac{2V_0^2}{g}\sin 2\alpha = 2X; \qquad y = 2X \operatorname{tg}\alpha.$$

129. Théorème II. — *Deux projectiles de coefficients balistiques c et c' sont lancés du même point (V_0,α),*

avec la même vitesse initiale V_0 *et sous le même angle de projection* α. *Démontrer que la trajectoire* c' *est constamment au-dessous de la trajectoire* c, *si* $c' > c$.

La démonstration de ce théorème exige qu'on ait recours aux équations différentielles de la trajectoire en coordonnées obliques, établies au n° 94.

1° L'équation différentielle analogue à l'hodographe et qui n'est fonction que de deux variables est :

$$dv_z = -\frac{v_z^2}{g}\frac{cF}{v}\,dp, \quad \text{où} \quad v = v_z\left[1 + p^2 - 2p\sin\alpha\right]^{\frac{1}{2}}$$

La variable v_z est la vitesse du projectile projetée sur la tangente initiale : $v_z = \dfrac{dz}{dt}$.

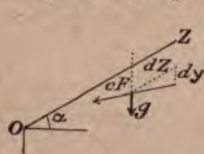


Fig. 56.

On a, en outre, $p = \dfrac{dy}{dz}$.

Intégrons l'équation différentielle depuis l'origine $(p = 0, v_z = V_0)$ jusqu'à une valeur p ; on aura

$$v_z = V_0 - \frac{c}{g}\int_0^p \frac{v_z^2 F}{v}\,dp \text{ pour la trajectoire } c,$$

$$v_z' = V_0 - \frac{c'}{g}\int_0^p \frac{v_z F}{v}\,dp \text{ pour la trajectoire } c'.$$

Or si $c' > c$, v' est d'abord plus petit que v_z ; mais v_z' ne pourra, pour une valeur commune de p, dépasser v_z ; car dans ce cas, on se serait trouvé, au passage, dans les mêmes conditions qu'à l'origine (égalité de v_z et de p) et par suite on aurait démontré que v_z' est, un instant après, plus petit que v_z.

2° Prenons le même *éloignement* z sur la ligne de projection. On a :

$$z = \frac{1}{g} \int_0^p v_z^2 \, dp$$

Puisque, pour une même valeur de p, on a toujours v'_z de la trajectoire c' plus petit que v_z de la trajectoire c, il faudra donc que, pour avoir le même éloignement z sur les deux trajectoires, on ait p plus grand pour la trajectoire c' que pour la trajectoire c.

3° L'*abaissement* y correspondant à l'*éloignement* z est donné par la formule

$$y = \frac{1}{g} \int_0^z p dz$$

D'après la propriété précédente, p est toujours plus grand pour la même valeur z sur la trajectoire c' que sur la trajectoire c. Donc l'*abaissement* y, d'après l'intégrale qui l'exprime, sur cette trajectoire c' sera plus grand que l'*abaissement* correspondant au même éloignement sur la trajectoire c.

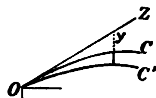


Fig. 57.

Donc la trajectoire c' est au-dessous de la trajectoire c dont le coefficient balistique est plus petit.

Corollaires. — 1° La tangente en c' est plus inclinée sur l'horizontale que la tangente en c. Car p est plus grand en c'.

2° On a $t = \int_0^z \frac{dz}{v_z}$. Comme $v'_z < v_z$, le temps mis par le projectile pour aller de l'origine au point de

même abscisse (ou de même éloignement) est plus grand sur la trajectoire c' que sur la trajectoire c.

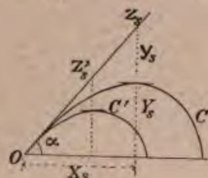


Fig. 58.

130. **Théorèmes sur le sommet**. — Au sommet de la trajectoire, on a $p = \operatorname{tg}\alpha$, et les théorèmes suivants peuvent être énoncés :

$v'_{z_s} < v_{z_s}$ donc $V'_s < V_s$

$z_s > z'_s$ $\quad X_s > X'_s$

$y_s > y'_s$ $\quad Y_s > Y'_s$, de l'équation $Y_s = \frac{1}{g}\int_0^{\operatorname{tg}\alpha} v_z^2 p\,dp$

$t_s > t'_s$ $\quad T_s > T'_s$, de l'équation $T_s = \frac{1}{g}\int_0^{\operatorname{tg}\alpha} v_z\,dp$

131. **Théorème III**. — *Une parabole à axe vertical ne peut couper la trajectoire atmosphérique en plus de trois points réels.*

Soient en effet $y = f(x)$ l'équation de la trajectoire et $y_1 = a + bx_1 + cx_1^2$, l'équation de la parabole à axe vertical.

Si les deux courbes ont m points réels communs, l'équation $(y - y_1)$ sera satisfaite pour m valeurs réelles de x. Or on sait, d'après le théorème de Rolle, que si une équation admet m racines réelles, entre deux de ces racines existe au moins une racine de la dérivée. Donc l'équation $\frac{dy}{dx} - \frac{dy_1}{dx_1} = 0$, admet au moins $m - 1$ racines et l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^2y_1}{dx_1^2} = 0$, admet au moins $m - 2$ racines.

Or, comme dans la parabole $\frac{d^2y_1}{dx_1^2} = \text{const.}$, on aura $\frac{d^2y}{dx^2} = \text{const.}$

Mais dans toute trajectoire atmosphérique, on a : $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\tau$, d'où (102)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\cos^2\tau}\frac{d\tau}{dx} = -\frac{g}{(v\cos\tau)^2}$$

On aura ainsi

$$\frac{g}{(v\cos\tau)^2} = \text{const.}$$

Or, on sait que $v\cos\tau$ est une quantité qui va toujours en décroissant de ∞ à 0. Il ne peut donc y avoir qu'une seule valeur de $v\cos\tau$ et par suite de v qui satisfasse à cette équation [1].

Donc la valeur maximum de $m - 2$ est 1, c'est-à-dire que m est au plus égal à 3.

Corollaires. — 1° Si une parabole à axe vertical est tangente en un point à la trajectoire atmosphérique, elle ne peut la couper qu'en un seul autre point.

2° La parabole de la vitesse qui a déjà trois points communs avec la trajectoire atmosphérique ne peut couper la trajectoire en un autre point.

3° La trajectoire atmosphérique est comprise entre deux paraboles à axe vertical construites sur la portée et tangentes respectivement à l'origine et au point de chute de cette trajectoire.

[1] On considère ici comme formant toute la trajectoire soit la trajectoire avec sommet, soit la branche isolée (126). Si on considère l'ensemble, $v\cos\tau$ prend deux fois la même valeur variant sur l'une et l'autre branche de ∞ à 0.

CHAPITRE VI

SUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DE LA BALISTIQUE EXTÉRIEURE

§ 1. — Cas de $F(v) = a + bv^n$

132. **Objet du chapitre.** — L'intégration de l'équation différentielle de l'hodographe $\frac{d(v\cos\tau)}{d\tau} = \frac{cvF}{g}$ qui est la seule équation du premier ordre parmi toutes les combinaisons possibles des équations du mouvement (90) qui ne renferme que deux variables v et τ, constitue, ainsi qu'il a été dit, le premier pas vers la solution complète du problème balistique.

Malheureusement, non seulement cette équation ne peut être intégrée quand on laisse arbitraire la fonction $F(v)$, mais même les formes analytiques de $F(v)$ qui permettraient l'intégration sont extrêmement peu nombreuses.

Une première forme est connue depuis longtemps : « Jean Bernoulli, le premier, dans les *Actes de Leipsig* « (p. 216, mai 1719) réduisit aux quadratures le pro- « blème balistique quand $F(v) = Bv^n$ et d'Alembert « dans son *Traité de l'équilibre et des mouvements des* « *fluides* (p. 356, 1744) démontra que la réduction « était encore possible quand $F(v) = a + bv^n$ et quand

« $F(v) = a + b \operatorname{Log} v$, a, b et n étant des constantes « quelconques. » (de Saint-Robert, t. I, p. 95.)

Plus récemment, le colonel Siacci a indiqué quelques autres formes de $F(v)$ qui permettent d'intégrer l'hodographe (§ 2).

Le présent chapitre est consacré à faire connaître sommairement ces résultats ; tout naturellement s'y joint l'étude du développement en série que les équations différentielles du n° 88 permettent immédiatement d'écrire par l'application de la formule de Mac-Laurin. Cette méthode constitue en effet une sorte d'intégration particulière, quoique très limitée en étendue, des équations différentielles. Enfin un dernier paragraphe sera consacré à la division du problème balistique qu'on peut baser sur les propriétés générales de l'hodographe dans le cas de $F(v)$ quelconque.

133. **Intégration de l'hodographe dans le cas où $\mathbf{F(v) = a + bv^n}$.** — Nous supposons, pour simplifier l'écriture, que le coefficient balistique c est compris dans les constantes a et b.

L'équation différentielle de l'hodographe s'écrira donc :

$$gd(v \cos \tau) = v(a + bv^n)\, d\tau.$$

Développant le premier membre et divisant par v^{n+1}, il vient :

$$g \cos \tau\, v^{-n-1}\, dv - (a + g \sin \tau)\, v^{-n}\, d\tau = b d\tau$$

Dans le premier membre on trouve : 1° la fonction $(a + g \sin \tau)$ et sa différentielle par rapport à τ qui est $g \cos \tau$; 2° la fonction v^{-n} et, à un facteur près, sa dif-

férentielle par rapport à v, qui est $-nv^{-n-1}$. Il est naturel de considérer le premier membre comme la différentielle d'un certain produit $d(Mv^{-n})$ où M est une fonction inconnue ne dépendant que de τ.

Pour déterminer la fonction M, multiplions les deux membres de l'équation par un facteur intégrant K fonction de τ, en vue de rendre le premier terme de l'équation différentielle identique à la différentielle de

$$d(Mv^{-n}) = -nv^{-n-1}\,Mdv + v^{-n}\,dM.$$

En identifiant, on devra avoir :

$$dM = -(a + g\sin\tau)\,Kd\tau$$

et

$$-nM = Kg\cos\tau.$$

Divisant membre à membre, il vient :

$$\frac{dM}{M} = \frac{n(a + g\sin\tau)\,d\tau}{g\cos\tau} = n\,\frac{\sin\tau}{\cos\tau}\,d\tau + \frac{na}{g}\,\frac{d\tau}{\cos\tau}$$

En intégrant :

$$\text{Log}\,M = -n\,\text{Log}\cos\tau + \frac{na}{g}\,\text{Log}\,\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2}\right)$$

ou

$$\text{Log}\,M = \text{Log}\left[\cos^{-n}\tau\,\text{tg}^{\frac{na}{g}}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2}\right)\right]$$

c'est-à-dire

$$M = \cos^{-n}\tau\,\text{tg}^{\frac{na}{g}}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2}\right)$$

ou en posant $\dfrac{a}{g} = h$

$$M = \cos^{-n}\tau\,\text{tg}^{nh}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2}\right)$$

Ainsi donc, on connaît le facteur intégrant $K = -\frac{nM}{g \cos \tau}$, fonction de τ, qui rend le premier membre de l'équation une différentielle exacte.

On aura ainsi pour l'équation différentielle de l'hodographe :

$$d(Mv^{-n}) = bKd\tau = -\frac{bn}{g}\frac{M}{\cos \tau} d\tau.$$

En intégrant il viendra :

$$Mv^{-n} = -\frac{n}{g} b \int \frac{Md\tau}{\cos \tau}.$$

Posons $$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2}\right) = \zeta$$

On en déduit :

$$\cos \tau = \frac{2\zeta}{1+\zeta^2} \text{ ; } \sin \tau = \frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2 + 1} \text{ ; } \frac{d\tau}{\cos \tau} = \frac{d\zeta}{\zeta}$$

Avec ces notations, M devient :

$$M = \cos^{-n}\tau \operatorname{tg}^{nh}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2}\right) = \frac{(1+\zeta^2)^n}{2^n\zeta^n}\zeta^{nh} = 2^{-n}(1+\zeta^2)^n \zeta^{n(h-1)}$$

Portant cette valeur de M ainsi que les valeurs de $d\tau$ et de $\cos\tau$ dans l'intégrale qui donne Mv^{-n}, celle-ci deviendra en fonction de la variable ζ :

$$2^{-n}(1+\zeta^2)^n \zeta^{n(h-1)} v^{-n} = -\frac{n}{2^n g} b \int (1+\zeta^2)^n \zeta^{nh-n-1} d\zeta$$

L'équation qui donnera alors v en fonction de ζ est la suivante :

$$\frac{1}{v^n} = \frac{1}{V_0^n} - \frac{nb}{g}\frac{1}{(1+\zeta^2)^n \zeta^{nh-n}} \int_{\zeta_0}^{\zeta} (1+\zeta^2)^n \zeta^{nh-n-1} d\zeta$$

La constante est déterminée par la condition qu'à l'origine du mouvement, on ait à la fois :

$$v = V_0 \quad \text{et} \quad \tau = \alpha, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \zeta_0 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)$$

comme limite de l'intégrale.

Ainsi donc, v est exprimé en fonction de ζ, au moyen d'une simple quadrature. Le problème balistique tout entier est alors réductible aux quadratures, ainsi qu'on le sait, puisque l'hodographe est intégré.

Les autres éléments de la trajectoire

$$dx = -\frac{v^2}{g}\,d\tau, \qquad dy = -\frac{v^2}{g}\operatorname{tg}\tau\,d\tau,$$

$$dt = -\frac{v}{g}\frac{d\tau}{\cos\tau}, \qquad ds = -\frac{v^2}{g}\frac{d\tau}{\cos\tau}$$

s'écrivent en effet, en introduisant la variable ζ

$$dx = -\frac{2}{g}\frac{v^2}{1+\zeta^2}\,d\zeta, \qquad dy = -\frac{v^2}{g}\frac{\zeta^2-1}{\zeta^2+1}\frac{d\zeta}{\zeta},$$

$$dt = -\frac{v}{\zeta}\,d\zeta, \qquad ds = -\frac{v^2 d\zeta}{\zeta}$$

et en remplaçant dans ces formules v par sa valeur en fonction de ζ, le calcul de x, t, y et s sera ramené à des quadratures.

134. **Cas d'intégration**[1]. — 1° L'intégrale qui figure dans l'expression de v s'exprime en termes finis et par conséquent aussi la vitesse v :

a) quand n est un nombre entier,

[1] Extrait de Saint-Robert, t. I, p. 101.

b) quand n étant fractionnaire,

$$\frac{n(h-1)}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{n(h+1)}{2} \quad \text{est un nombre entier.}$$

2° Les quadratures qui donnent les éléments x, y, t, s de la trajectoire s'obtiennent sous forme finie dans les cas particuliers suivants :

s quand
- $n = 0$ quel que soit h ;
- $n = 1$ pourvu que h soit rationnel et différent de ± 1 ;
- $n = 2$ quel que soit h ;
- $n = \frac{2}{p}$ pourvu qu'on ait $h = pq \pm 1$ (p et q étant deux nombres entiers).

x et y quand
- $n = 0$ quel que soit h ;
- $n = 1$ pourvu que h soit rationnel et différent de ± 1 ;
- $n = 2$ pourvu que h soit rationnel et différent de 0 et de ± 1 ;
- $n = \frac{2}{p}$ pourvu qu'on ait $h = pq \pm 1$ (p et q étant deux nombres entiers).

t quand
- $n = 0$ quel que soit h ;
- $n = 1$ quel que soit h ;
- $n = \frac{1}{p}$ pourvu qu'on ait $h = 2\,pq \pm 1$ (p et q étant deux nombres entiers).

« Soit, par exemple, le cas de $n = 2$, c'est-à-dire $F(v) = a + bv^2$.

On a pour l'intégrale qui figure dans l'expression de v

$$\int_{\zeta_0}^{\zeta} (1+\zeta^2)^2 \zeta^{2h-3}\, d\zeta = \frac{1}{2(h-1)}\zeta^{2(h-1)} + \frac{\zeta^{2h}}{h} + \frac{1}{2(h+1)}\zeta^{2(h+1)} - \frac{1}{2(h-1)}\zeta_0^{2(h-1)} - \frac{\zeta_0^{2h}}{h} - \frac{1}{2(h+1)}\zeta_0^{2(h+1)}$$

« Il s'ensuit que quand h est rationnel et différent de zéro et de ± 1, les expressions de dx et de dy ont la forme de fractions rationnelles [1], qu'on peut intégrer en termes finis, au moyen des logarithmes et des arcs de cercle, après qu'on les aura décomposées en fractions partielles ayant pour dénominateurs les facteurs binômes ou trinômes du dénominateur commun.

« Il est inutile d'avertir que, si h est fractionnaire et égal à $\frac{p}{q}$ on doit égaler $\zeta^{\frac{1}{q}}$ à une nouvelle variable, pour rendre rationnel le dénominateur.

« Le dénominateur n'est plus algébrique, toutes les fois que $h = 0$ ou $h = \pm 1$; en effet dans le premier cas, on a

$$\frac{\zeta_0^{2h}}{h} - \frac{\zeta^{2h}}{h} = \infty - \infty = 2 \operatorname{Log} \frac{\zeta_0}{\zeta}$$

et dans le second

$$\frac{\zeta_0^{2(h\pm 1)}}{2(h\pm 1)} - \frac{\zeta^{2(h\pm 1)}}{2(h\pm 1)} = \operatorname{Log} \frac{\zeta_0}{\zeta}.$$

« Alors les valeurs de x et de y ne peuvent plus s'obtenir en termes finis.

« Il arrive donc que tandis qu'on ne peut obtenir les valeurs finies des coordonnées de la trajectoire dans le cas le plus simple de la résistance proportionnelle seulement au carré de la vitesse, on a, au contraire, en termes finis, les valeurs de ces coordonnées dans le cas plus général dans lequel, au terme qui contient le carré de la vitesse, on en ajoute un autre constant, rationnel et différent de l'unité. Ce qui s'explique aisément, en remarquant que le degré de l'équation à résoudre, pour décomposer le dénominateur, s'élève à

[1] On a, par exemple, dans le cas général

$$g\,dx = -\int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{2(1+\zeta^2)\,\zeta^{2(h-1)}\,d\zeta}{\left[nb\int_{\zeta_0}^{\zeta}(1+\zeta^2)^{n}\,\zeta^{n(h-1)-1}\,d\zeta\right]^{\frac{2}{n}}}$$

mesure que h devient une fraction plus petite et que cette équation est de degré infini pour $h = 0$. »

135. **Exercices.** — 1° On peut intégrer l'hodographe dans le cas où

$$F(v) = a + b \operatorname{Log} v.$$

(Même procédé que ci-dessus.)

2° Si on considère deux milieux l'un où $F(v) = a$ et l'autre où $F(v) = a + bv$, et les temps t et t' employés par les projectiles pour parcourir deux arcs ayant les mêmes inclinaisons τ à leurs extrémités, on a

$$e^{bgt} = 1 + bgt' \qquad \text{(de Saint-Robert.)}$$

3° Si on considère deux milieux, l'un où $F(v) = a$ et l'autre où $F(v) = a + bv^2$, et les arcs s et s' décrits par les projectiles entre les mêmes inclinaisons α et τ, on a la relation

$$e^{2bgs} = 1 + 2bgs' \qquad \text{(de Saint-Robert.)}$$

4° Intégrer directement l'hodographe comme une équation de Bernoulli, en posant $v^{-n} = V$.

$$dV + nV \frac{a + g \sin \tau}{g \cos \tau} + \frac{nb}{g} \frac{d\tau}{\cos \tau} = 0$$

dont l'intégrale est

$$V = e^{-n\int\left(\frac{a + g\sin\tau}{g\cos\tau}\right)d\tau} \left[c - \frac{nb}{g} \int e^{n\int\frac{a+g\sin\tau}{g\cos\tau}d\tau} \frac{d\tau}{\cos\tau} \right].$$

Montrer qu'on a

$$e^{\int\left(\frac{a + g\sin\tau}{g\cos\tau}\right)d\tau} = \frac{\operatorname{tg}^{\frac{a}{g}}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2}\right)}{\cos\tau}$$

et ramener l'expression de V à celle trouvée pour $\frac{1}{v^n}$ dans le texte du paragraphe.

§ 2. — Cas d'intégration de l'hodographe d'après Siacci

136. **Le problème balistique au point de vue analytique.** — L'intégration de l'équation de l'hodographe ne peut intéresser réellement les balisticiens que si la fonction $F(v)$ qui y figure, ou bien est laissée arbitraire de manière à s'accorder dans tous les cas avec la loi expérimentale de la résistance de l'air, ou bien, tout au moins, est remplacée par une autre fonction capable de représenter plus ou moins bien, sur une plus ou moins grande étendue cette même fonction expérimentale $F(v)$. Si cet objet précis est négligé, on passe du domaine de la Balistique à celui de la pure Analyse. Sans entrer dans les détails des calculs, il importe seulement de connaître l'état actuel où cette analyse a amené la solution du problème balistique et, à cet effet, nous ne saurions mieux faire que d'emprunter quelques pages au Cl Siacci.

Les citations ci-dessous, tirées des *C. R. de l'Académie des Sciences*, sont presque textuelles.

137. **Sur un problème de d'Alembert.** *Note de M. F. Siacci. C.R. t. 131, p. 475 (Ann. 1901).*

« Pour que les équations du mouvement d'un projectile dans un milieu résistant se ramènent aux quadratures, la résistance étant supposée directement contraire à la vitesse, et fonction de la seule vitesse, il faut intégrer l'équation de l'hodographe :

$$(1) \qquad \cos\tau\, dv = v\left(\frac{cF(v)}{g} + \sin\tau\right) d\tau.$$

« D'Alembert chercha des formes de la fonction $\dfrac{cF}{g}$ permettant cette intégration et il en trouva quatre :

$$\frac{cF}{g} = a + bv^n \qquad \frac{cF}{g} = a + b\operatorname{Log} v$$

$$\frac{cF}{g} = av^n + R + bv^{-n} \qquad \frac{cF}{g} = a\,[\operatorname{Log} v]^2 + R\operatorname{Log} v + b$$

avec deux ou trois constantes chacune, car dans les deux dernières formules les quantités a, b, R, n et a, b, R sont respectivement liées par une équation. Avant d'Alembert, on ne connaissait que le seul cas de $\frac{cF}{g} = B_n v^n$, résolu par Jean Bernoulli. D'Alembert, après avoir indiqué ces cas, ajoute :

« Je ne prétends pas, au reste, qu'il n'y ait que ces seuls « cas où la trajectoire soit constructible ; mais je laisse à ceux « qui aiment ces sortes de calculs à pousser plus loin leurs « recherches là-dessus. (D'Alembert, *Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides*. Paris, p. 359, 1744.)

« L'appel est resté sans réponse, que je sache. Le problème de d'Alembert ne manque pas d'intérêt, même au point de vue pratique. Si l'on connaissait bon nombre de fonctions $\frac{cF}{g}$ contenant plusieurs constantes arbitraires et permettant l'intégration de (1), on pourrait espérer d'y trouver une fonction $\frac{cF}{g}$ s'accordant avec la résistance donnée par les expériences. La fonction $a + bv$, par exemple, qui rentre dans les cas de d'Alembert représente une loi de la résistance de l'air, signalée récemment par M. le C[l] Chapel (*C. R.*, 10 déc. 1894). Mais la loi de Chapel ne vaut que pour les hautes vitesses. Le problème de d'Alembert d'ailleurs fait abstraction des conditions pratiques et comme problème d'analyse, il pourrait bien appeler l'attention des géomètres.

« En attendant, je donne ici quelques nouveaux cas d'intégrabilité. Trois des nouvelles fonctions $\frac{cF}{g}$ contiennent quatre constantes arbitraires, et deux de ces fonctions dérivent de l'intégration d'une équation de Riccati, un peu plus générale que d'ordinaire.

Première forme. « Posons : $\frac{cF}{g} = \rho.$

« Soit $\mu = a \int \rho dv - av \sin \tau - b \int \frac{d\tau}{\cos \tau}$

et multiplions (1) par $\quad e^{\lambda}(v \cos \tau)^{-n}$

a, b, n sont des constantes.

On trouve que le multiplicateur μ est un facteur intégrant de (1) si ρ vérifie l'équation :

$$\frac{d(\rho v^{1-n})}{dv} + av^{1-n}(\rho^2 - 1) = bv^{-n}.$$

« Si l'on fait $a = 0$, on a de suite les deux premières formules de d'Alembert suivant que $n \gtrless 1$ ou $n = 1$. Dans le cas général en posant $\quad n = \frac{1}{q}, \quad av = \frac{x^q}{q}, \quad \rho = yx^{1-q}$ l'équation de condition devient

$$(2) \qquad \frac{dy}{dx} + y^2 = x^{2q-2} + bqx^{q-2}$$

un peu plus générale que l'équation ordinaire de Riccati (où $b = 0$) qu'on sait intégrer au moyen des fonctions algébriques et exponentielles lorsque $q = 0$ ou lorsque $\frac{1}{q}$ est un nombre impair positif ou négatif. Mais on peut aussi intégrer (2) au moyen des mêmes fonctions[1] lorsque h et k étant deux nombres entiers et positifs (zéro compris) on a

$$b = h - k, \qquad \frac{1}{q} = n = \pm(1 + h + k).$$

« Posons comme définition d'une fonction φ des trois lettres σ, θ et v

$$\varphi(\sigma, \theta, v) = 1 + \sum_{i=1} \frac{\sigma(\sigma-1)(\sigma-2)\ldots(\sigma-i+1)}{(\sigma+\theta)(\sigma+\theta-1)\ldots(\sigma+\theta-i+1)} \frac{(2av)^i}{1.2\ldots i}.$$

La fonction φ doit en outre remplir les conditions suivantes :

[1] Siacci, *Sulla integrazione di una equazione differenziale e sull' equazione di Riccati* (*Rendiconti della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematische di Napoli*, aprile 1901).

1° Pour $\sigma = 0$ et pour $(\sigma + \theta) = 0$, on doit avoir $\varphi = 1$.

2° Si $(\sigma + \theta)$ est entier et positif, σ doit aussi être entier et positif : dans ce cas le développement de φ s'arrête au terme où $i = s$.

« Ceci posé l'intégrale de (2) s'obtient en dérivant logarithmiquement par rapport à v, l'une ou l'autre des équations suivantes :

$$\text{(I)}\quad e^{a\int\rho dv} = e^{av}\,\varphi(h, k, -v) + Ce^{-av}\,\varphi(h, k, v)$$
$$\text{avec}\quad b = h - k \quad\text{et}\quad n = 1 + h + k.$$

$$\text{(II)}\quad (av)^{-n}\,e^{a\int\rho dv} = e^{av}\,\varphi\,(h, k, -v) + Ce^{-av}\,\varphi\,(h, k, v)$$
$$\text{avec}\quad b = h - k \quad\text{et}\quad n = -1 - h - k.$$

C est une constante arbitraire.

Si h et k sont entiers et positifs, les fonctions φ sont des polynomes finis. Si b et n ne sont pas compatibles avec h et k entiers et positifs (zéro compris) on aura des séries convergentes, quel que soit v, en prenant (II) lorsque n est positif et en prenant (I) lorsque n est négatif. De cette manière $h + k$ est toujours négatif et le dénominateur en φ ne s'annule jamais.

Deuxième forme. — « On peut avoir d'autres cas d'intégrabilité en donnant d'autres formes au facteur intégrant. Si l'on multiplie (1) par :

$$M = \frac{[\lambda\,(1 + \sin\tau) + \mu\,(1 - \sin\tau)]^{p}}{v\cos\tau\,(1 + \sin\tau)^{\alpha}\,(1 - \sin\tau)^{\beta}}$$

où α, β, p sont des constantes et λ et μ des fonctions inconnues de v, on trouve que M est un facteur intégrant de (1) si λ, μ et ρ vérifient les équations suivantes :

$$vd\,[(\rho + 1)\,\lambda^{p}] = 2\beta\lambda^{p}\,dv\,; \qquad vd\,[(\rho - 1)\,\mu^{p}] = 2\alpha\mu^{p}dv$$
$$\lambda - \mu = kv^{\frac{p-\alpha+\beta}{p}}.$$

k est une constante.

« Les deux intégrations s'effectuent sans difficulté :

1° Lorsque $\alpha = \beta = 0$; 2° lorsque $p = 1$ et qu'on annule

la constante de la première intégration; 3° lorsque $\beta = 0$ et $p = \alpha$; 4° lorsque $\alpha = 0$ et $p = -\beta$.

« A ces quatre cas correspondent quatre formules donnant des expressions de ρ rendant intégrable l'hodographe. Ce sont

$$\text{(III)}\quad v = a(\rho+1)^i + b(\rho-1)^i$$

$$\text{(IV)}\quad qv = (\rho+1+2a)^a(\rho-1-2b)^b[(a+b+2)\rho+a-b]$$

$$\text{(V)}\quad \text{K}v = \frac{e^{\frac{r}{2}\int\frac{d\rho}{1+a(\rho-1)^r}}}{1+a(\rho-1)^r}$$

$$\text{(VI)}\quad \text{H}v = \frac{e^{-\frac{r'}{2}\int\frac{d\rho}{1+b(\rho+1)^{r'}}}}{1+b(\rho+1)^{r'}}$$

a, b, q, K, H, i, r, r' sont des constantes arbitraires liées ou non avec les arbitraires α, β, p et k.

Troisième forme. — « Si l'on donne au facteur intégrant l'une ou l'autre des formes suivantes :

$$\frac{(f+g\sin\tau+h\sin^2\tau)^{\frac{1}{2}}}{v\cos\tau}; \qquad \frac{1}{v\cos\tau}\left(\frac{f+g\sin\tau}{1+h\sin\tau}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

f, g, h étant des fonctions inconnues de v, on trouve des équations différentielles qui s'intègrent facilement. On détermine de cette manière f, g, h et l'on obtient pour ρ les équations suivantes

$$\text{(VII)}\quad \frac{a}{(\rho+1)^2} + \frac{b}{(\rho-1)^2} = v^2\rho + c$$

$$\text{(VIII)}\quad \text{Log}\int v\,d\rho = \frac{r}{2}\int\frac{d\rho}{1+a(\rho-1)^r} - \frac{r}{2}\int\frac{d\rho}{1+b(\rho+1)^r} + \text{Q}$$

« La dernière formule donne v en fonction de ρ avec un nombre fini de termes lorsque r est rationnel et contient quatre constantes arbitraires, comme (I) et (II). Elle contient aussi comme cas particuliers, les formules (V) et (VI).

Quatrième forme. — « On peut avoir encore un cas d'intégrabilité de (1) en prenant comme facteur intégrant $e^{\mu}(v \cos \tau)^{-1}$

avec $$\mu = \left[a \int \rho dv - av \sin \tau\right]^2 + 2a^2 \int v(\rho^2 - 1)\, dv.$$

La fonction ρ s'obtient au moyen d'une équation du second ordre qu'on intègre facilement.

138. Sur un problème de d'Alembert. — *Note de M. F. Siacci. C. R.*, t. 133, p. 381 et 496 (Ann. 1901).

« Aux cas d'intégrabilité de l'équation de l'hodographe on peut ajouter les deux suivants :

« Le *premier* est

$$\rho = Av\sqrt{2c + v^2} + B(c + v^2).$$

En introduisant la variable z liée à v et τ par la relation

$$2c + v^2 = v^2 z^2 (Bc - \sin \tau)^2$$

l'équation de l'hodographe se réduit à

$$\frac{z dz}{z^2(B^2c^2 - 1) + 2Acz + 1} + \frac{d\tau}{\cos \tau (Bc - \sin \tau)} = 0$$

où les variables sont séparées et les intégrations partielles, en outre, ne contiennent que des fonctions élémentaires.

« L'*autre cas* s'obtient en multipliant l'équation de l'hodographe par

$$(1 - \sin \tau)^{-\alpha} (1 + \sin \tau)^{\beta} (y + \sin \tau)^{\alpha - \beta}$$

et en soumettant ce multiplicateur à la condition d'être un facteur intégrant de l'hodographe ; α et β sont des constantes quelconques, mais différentes et y est une fonction de v. On obtient ainsi deux équations différentielles entre ρ, v et y, lesquelles intégrées donnent :

$$\rho = 1 + \frac{(y + 1)^{\beta}}{(y - 1)^{\alpha}} \left[\gamma + 2\beta \int \frac{(y + 1)^{\alpha} dy}{(y + 1)^{\beta + 1}}\right]$$

$$Cv^2 = \frac{e^{2\int \frac{\beta dy}{y^2 - 1}}}{y^2 - 1}$$

L'élimination de y donnerait ρ en fonction de v, avec quatre constantes arbitraires α, β, γ et C. Mais cette élimination n'est point nécessaire. Il convient au contraire, pour l'intégration de l'hodographe, d'exprimer ρ et v en fonction de y.

« Le premier cas, pour $A = 0$ se réduit à $\rho = B(C + v^2)$ qui a été traité par Legendre[1]. Il rentre dans le cas de d'Alembert $\rho = av^n + b$, mais Legendre ne cite pas ce grand géomètre, quoiqu'il cite Bernoulli pour le cas $\rho = av^n$.

Jacobi a traité le cas $\rho = av^n + b$, comme une généralisation du cas de Legendre ; il cite, lui aussi, Bernoulli, mais non pas d'Alembert[2]. »

§ 3. — La série de Mac-Laurin autour d'un point de la trajectoire

139. **Principe du développement.** — S'il n'est pas, en général, possible de résoudre le problème balistique par l'intégration des équations différentielles, il est cependant toujours facile d'obtenir un développement en série qui, dans certaines limites, permettra le calcul des éléments d'un arc de trajectoire.

Étant données les valeurs des éléments à l'origine d'un arc, c'est-à-dire x_0, y_0, v_0, t_0 et τ_0, on se propose de rechercher et de calculer quatre des cinq quantités x, y, v, t et τ de la fin de l'arc, l'une d'elles quelconque étant supposée définir cette extrémité.

Comme on connaît les expressions des dérivées premières et secondes de toutes ces quantités, les unes par rapport aux autres (127 ex. 3), on pourra calculer aisé-

[1] Legendre. Dissertation sur la question de balistique etc. Paris, 1816, p. 91.

[2] Jacobi. Gesammelte Verke. Band, IV, p. 287.

ment les dérivées troisième, quatrième, etc., et par suite obtenir directement le développement suivant la formule de Mac-Laurin des éléments de la fin de l'arc par rapport aux données à l'origine et à un des arguments de cette extrémité.

A condition de réduire suffisamment l'amplitude de l'arc, de manière que tous les éléments n'éprouvent que de faibles variations, on aura ainsi une méthode de calcul qui pourra se prêter, dans les cas où sa convergence sera suffisante, à des applications pratiques.

Il existe, avec les cinq variables choisies prises l'une ou l'autre pour argument x, y, v, t et τ au dénominateur des dérivées, cinq groupes de formules, applicables autour du point x_0, y_0; tous ces systèmes rentreront évidemment les uns dans les autres, auront une convergence de même ordre et on pourra passer de l'un à l'autre par la méthode du *retour des séries*. Il suffira donc de calculer les coefficients d'une des séries pour pouvoir calculer ceux des autres arguments.

Soit ζ un élément quelconque dont on veut le développement par rapport à un autre ξ. On posera $\xi = \xi_0 - (\xi_0 - \xi)$ et la formule de Mac-Laurin donnera immédiatement la série

$$\zeta = \zeta_0 - (\xi_0 - \xi)\left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)_0 + \frac{(\xi_0 - \xi)^2}{1.2}\left(\frac{d^2\zeta}{d\xi^2}\right)_0 - \frac{(\xi_0 - \xi)^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3\zeta}{d\xi^3}\right)_0 \dots (-1)^n \frac{(\xi_0 - \xi)^n}{n!}\left(\frac{d^n\zeta}{d\xi^n}\right)_0.$$

Il suffira donc, pour pouvoir écrire cette formule, de calculer les dérivées successives $\frac{d\zeta}{d\xi}$, $\frac{d^2\zeta}{d\xi^2}$, $\frac{d^3\zeta}{d\xi^3}$... de ζ

par rapport à ξ et de déterminer leurs valeurs à l'origine.

On supposera à l'origine de l'arc $x_0 = y_0 = t_0 = 0$, $v_0 = V_0$ et $\tau_0 = \alpha$.

140. **Équation de la trajectoire.** — Nous prendrons comme point de départ de toutes ces séries la relation entre y et x que nous écrirons :

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2V_0^2\cos^2\alpha} \cdot \left[1 + A_0\frac{x}{1.2.3} + A_1\frac{x^2}{1.2.3.4} + A_2\frac{x^3}{1.2.3.4.5} + \cdots\right]$$

Les deux premiers termes peuvent être écrits directement, puisque la trajectoire dans l'air et la trajectoire du vide sont osculatrices (128), au point (V_0, α). Il s'agit maintenant de déterminer les coefficients $A_0, A_1, A_2 \ldots$

On trouve aisément, en sachant (88) que

$$\frac{d\tau}{dx} = -\frac{g}{v^2} \quad \text{et} \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{g}{v\cos\tau}\left(\frac{cF}{g} + \sin\tau\right)$$

les formules suivantes

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\tau; \qquad \frac{dy^2}{dx^2} = -\frac{g}{v^2\cos^2\tau}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{2g}{v^4\cos^3\tau}cF;$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{2gcF}{v^6\cos^4\tau}\left[g\left(\frac{vF'}{F} - 1\right)\sin\tau + cF\left(\frac{vF'}{F} - 4\right)\right]$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = -\frac{2gcF}{v^8\cos^5\tau}$$

$$\left[\begin{array}{l} g^2\left(\frac{vF'}{F} - 1\right) + c^2F^2\left(\frac{v^2F''}{F^2} + \frac{v^2F'^2}{F^2} - 13\frac{vF'}{F} + 24\right) \\ + cFg\left(2v^2\frac{F''}{F} + \frac{v^2F'^2}{F^2} - 15\frac{vF'}{F} + 14\right)\sin\tau \\ + g^2\left(\frac{v^2F''}{F} - \frac{3vF'}{F} + 3\right)\sin^2\tau. \end{array}\right]$$

Et portant ces valeurs dans la série du n° 139 :

$$\zeta = \zeta_0 - (\xi_0 - \xi)\left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)_0 + \cdots$$

et après y avoir fait

$$v = V_0,\ \tau = \alpha,$$

il viendra pour les coefficients A_0, A_1 et A_2 les valeurs suivantes :

$$A_0 = +4\frac{cF_0}{V_0^2\cos\alpha}.$$

$$A_1 = -4\frac{cF_0}{V_0^4\cos^2\alpha}\left[\begin{array}{l} + g\left(\frac{V_0F_0'}{F_0} - 1\right)\sin\alpha \\ + cF_0\left(\frac{V_0F'}{F_0} - 4\right) \end{array}\right]$$

$$A_2 = +4\frac{cF_0}{V_0^6\cos^3\alpha}$$

$$\left[\begin{array}{l} + g^2\left(\frac{V_0^2F_0''}{F_0} - \frac{3V_0F_0'}{F_0} + 3\right)\sin^2\alpha \\ + cF_0g\left(2V_0^2\frac{F_0''}{F_0} + V_0^2\frac{F_0'^2}{F_0^2} - 15V_0\frac{F_0'}{F_0} + 14\right)\sin\alpha \\ + g^2\left(\frac{V_0F_0'}{F_0} - 1\right) + c^2F_0^2\left(\frac{V_0^2F''}{F_0^2} + V_0^2\frac{F_0''}{F_0^2} - 13\frac{V_0F_0'}{F_0} + 24\right) \end{array}\right]$$

Le coefficient A_0 renferme la résistance de l'air F_0.
» A_1 en outre la dérivée première F'_0.
» A_2 en outre la dérivée seconde F''_0.
Le coefficient A_0 est du degré 0 en $\sin\alpha$ et -1 en $\cos\alpha$.
» A_1 » 1 en $\sin\alpha$ et -2 en $\cos\alpha$.
» A_2 » 2 en $\sin\alpha$ et -3 en $\cos\alpha$.

141. **Autres éléments de la trajectoire.** — Pour obtenir, en fonction de x, le développement des autres éléments de l'extrémité de l'arc, c'est-à-dire v, τ et t, on opérerait de la même façon en calculant les dérivées successives telles que $\frac{dt}{dx}, \frac{d^2t}{dx^2}, \frac{d^3t}{dx^3}\cdots$

Mais on peut conduire les calculs de manière à introduire immédiatement dans les formules les coefficients A_0, A_1, A_2... C'est en employant les formules du *problème balistique inverse* (97) qui permettent, étant donnée l'équation de la trajectoire, de déterminer les différents éléments d'un point (x,y).

On a en effet (97) :

$$\operatorname{tg}\tau = y' ; \quad t = \int_0^x \left(-\frac{y''}{g}\right)^{\frac{1}{2}} dx ; \quad u = \left(-\frac{g}{y''}\right)^{\frac{1}{2}}$$

On trouve ainsi :

$$y = x\operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2V_0^2\cos^2\alpha}\left[1 + A_0\frac{x}{1.2.3} + A_1\frac{x^2}{1.2.3.4} + A_2\frac{x^3}{1.2.3.4.5} + \ldots\right]$$

$$\operatorname{tg}\tau = \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx}{V_0^2\cos^2\alpha}\left[1 + \frac{1}{2}A_0\frac{x}{1.2} + \frac{1}{2}A_1\frac{x^2}{1.2.3} + \frac{1}{2}A_2\frac{x^3}{1.2.3.4} + \cdots\right]$$

$$t=\frac{x}{V_0\cos\alpha}\left[1+\frac{A_0}{8}x+\frac{1}{24}\left(A_1-\frac{A_0^2}{4}\right)x^2+\frac{1}{32}\left(\frac{A_2}{3}-\frac{A_0A_1}{4}-\frac{A_0^3}{16}\right)x^3+\cdots\right].$$

$$u=u_0\left[1-\frac{A_0}{4}x-\frac{1}{8}\left(A_1-\frac{3}{4}A_0^2\right)x^2-\frac{1}{8}\left(\frac{A_2}{3}-\frac{3}{4}A_0A_1+\frac{3}{16}A_0^3\right)x^3+\cdots\right]$$

On voit ainsi que les expressions entre crochets sont les facteurs qui multiplient les valeurs de chaque élément dans le vide. On donne d'une façon générale le nom de *facteurs de la trajectoire* (260) à ces quantités, fonctions dans les cas ordinaires de x, de V_0 et de α, qui modifient la trajectoire du vide.

142. **Forme de l'équation de la trajectoire.** — On peut donner de l'équation finie de la trajectoire une forme particulière qui dérive du développement de Mac-Laurin employé ci-dessus : en introduisant, en effet, le reste de la série, on écrira pour la valeur de y

$$y=x\left(\frac{dy}{dx}\right)_0+\frac{x^2}{2!}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\int^x(x-z)^{n-1}\frac{d^ny}{dx^n}dz$$

z étant une variable auxiliaire qui va de 0 à la limite supérieure x de l'intégrale.

En se bornant aux trois premiers termes, on aura, pour la trajectoire, l'équation :

$$y=x\left(\frac{dy}{dx}\right)_0+\frac{x^2}{2!}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)+\frac{1}{2!}\int^x(x-z)^2\frac{d^3y}{dx^3}dz.$$

Mais on a d'après le tableau du n° 140 :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = \operatorname{tg} \alpha ; \qquad \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 = -\frac{g}{u_0^2} ;$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{2g}{v^4 \cos^3 \tau} cF.$$

On aura donc :

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} - gc \int_0^x (x-z)^2 \frac{F(v)}{v^4 \cos \tau} dz.$$

C'est l'équation qu'il s'agissait d'établir et dans laquelle v et τ doivent être considérés comme fonction de la variable auxiliaire z.

143. **Tir horizontal**. — Le tir horizontal est celui où toute la trajectoire, depuis l'origine jusqu'au point de chute peut être représentée par la série du n° 141 limitée à ses premiers termes. Faisant $y = 0$ et $x = X$, l'équation de la trajectoire deviendra :

$$\frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g} = X\left[1 + A_0 \frac{X}{1.2.3} + A_1 \frac{X^2}{1.2.3.4} + A_2 \frac{X^3}{1.2.3.4.5} + \cdots\right]$$

Mais les coefficients A_0, A_1... renferment l'angle de projection α. Pour obtenir des formules indépendantes de α dans le second membre, il faut donc remplacer $\sin \alpha$ et $\cos \alpha$ en fonction de X. On a :

$$\cos \alpha = 1 - \frac{\sin^2 2\alpha}{8} + \cdots$$

$$\sin \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2} + \frac{\sin^3 2\alpha}{16} + \cdots$$

ou : $\cos \alpha = 1 - \frac{1}{8}\left(\frac{gX}{V_0^2}\right)^2 \left(1 + \frac{2A_0X}{1.2.3} + \cdots\right)$

$$\sin \alpha = \frac{1}{2}\frac{gX}{V_0^2}\left[1 + \frac{A_0X}{1.2.3} + \frac{A_1X^2}{1.2.3.4} + \cdots\right] + \frac{1}{16}\left(\frac{gX}{V_0^2}\right)^3\left[1 + \cdots\right]$$

ou enfin

$$\sin \alpha = \frac{1}{2}\frac{gX}{V_0^2}\left[1 + \frac{A_0X}{1.2.3} + X^2\left(\frac{A_1}{1.2.3.4} + \frac{g^3}{8V_0^6}\right)\cdots\right],$$

Mais si on ne conserve dans le crochet du deuxième membre de $\frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}$ que les termes en X^3, il faudra :

1° Dans A_0 remplacer $\cos \alpha$ par $1 - \left(\frac{gX}{V_0^2}\right)^2$;

2° Dans A_1 remplacer $\sin \alpha$ par $\frac{1}{2}\frac{gX}{V_0^2}$ et $\cos^2 \alpha$ par 1 ;

3° Dans A_2 supprimer les termes en $\sin^2 \alpha$ et $\sin \alpha$.

Il viendra alors, en se bornant aux termes en X^2 dans le crochet

$$\frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g} = X\left[1 + \frac{4cF_0}{V_0^2}\frac{X}{1.2.3} - \frac{c^2F_0^2}{V_0^4}\left(\frac{V_0F_0'}{F_0} - 4\right)\frac{X^2}{1.2.3.}\cdots\right]$$

Un procédé de calcul analogue permettra d'obtenir les autres éléments du point de chute.

$$\operatorname{tg} \omega = -\frac{gX}{2V_0^2}\left[1 + \frac{4cF_0}{V_0^2}\frac{X}{3} - \left(\frac{c^2F_0^2}{V_0^4}\left(\frac{V_0F_0'}{F_0} - 4\right) - \frac{g^2}{2V_0^4}\right)\frac{X^2}{1.2}\cdots\right]$$

$$T = \frac{X}{V_0}\left[1 + \frac{cF_0}{V_0^2}\frac{X}{2} - \left(\frac{c^2F_0^2}{V_0^4}\left(\frac{V_0F_0'}{F_0} - 3\right) - \frac{3g^2}{4V_0^4}\right)\frac{X^2}{1.2.3}\cdots\right]$$

$$u_\omega = V_0\left[1 - \frac{cF_0}{V_0^2}X + \left(\frac{c^2F_0^2}{V_0^4}\left(\frac{V_0F_0'}{F_0} - 1\right) - \frac{g^2}{4V_0^4}\right)\frac{X^2}{1.2}\cdots\right]$$

144. **Origine des tables de tir.** — Les formules

du tir horizontal trouveront, en particulier, une application naturelle dans le calcul des éléments d'une table de tir au voisinage des angles de projection nuls ; ce calcul exige une grande précision si on veut ne pas être exposé à des invraisemblances choquantes, comme par exemple une portée dans l'air plus grande que dans le vide, pour un même angle de projection. A l'origine, en effet, les deux trajectoires sont osculatrices et les formules du n° 143 qui donnent justement les éléments sous forme de différences entre les valeurs dans le vide et dans l'air, permettent d'opérer facilement le calcul.

X, la *portée*, est l'argument des tables de tir. Pour calculer celles-ci, on construit souvent les courbes des différents éléments qui figurent dans la table, α, T, ω, u_ω pour le point de chute, en fonction de la variable X. Cherchons à déterminer, au moyen des formules du tir horizontal, les rayons de courbure de ces différentes courbes.

L'*abscisse* commune à toutes ces courbes est la portée X. Pour la simplicité des calculs et des constructions graphiques, il importe de prendre pour *ordonnées* des quantités de même espèce que X.

On prendra alors, par exemple pour les éléments du point de chute, les ordonnées suivantes :

$\alpha' = \dfrac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}$ pour les *angles de projection ;*

$\omega' = -\dfrac{2V_0^2}{g} \operatorname{tg} \omega$ pour les *angles de chute ;*

$T' = V_0 T$ pour la *durée du trajet ;*

$u_\omega' = (V_0 - u_\omega) \dfrac{V_0^2}{cF_0}$ pour les *vitesses restantes horizontales*.

Les équations du n° 143 deviennent alors :

$$\alpha' = X\left(1 + \frac{4cF_0}{V_0^2}\frac{X}{1.2.3.} + \cdots\right)$$

$$\omega' = X\left(1 + \frac{4cF_0}{V_0^2}\frac{X}{3} + \cdots\right)$$

$$T' = X\left(1 + \frac{cF_0}{V_0^2}\frac{X}{2} + \cdots\right)$$

$$u_\omega' = X\left(1 - \left(\frac{cF_0}{V_0^2}\left(\frac{V_0F_0'}{F_0} - 1\right) - \frac{g^2}{4V_0^2}\frac{1}{cF_0}\right)\frac{X}{1.2.} \cdots\right)$$

Toutes ces courbes sont tangentes à la bissectrice des axes de coordonnées.

Posons : $$\varphi_0 = \frac{V_0^2}{cF_0},$$

on aura :

$$\frac{d\alpha'}{dX} = 1 + \frac{4}{3}\frac{X}{\varphi_0}; \qquad \frac{d^2\alpha'}{dX^2} = \frac{4}{3}\frac{1}{\varphi_0};$$

$$\frac{d\omega'}{dX} = 1 + \frac{8}{3}\frac{X}{\varphi_0}; \qquad \frac{d^2\omega'}{dX^2} = \frac{8}{3}\frac{1}{\varphi_0};$$

$$\frac{dT'}{dX} = 1 + \frac{X}{\varphi_0}; \qquad \frac{d^2T'}{dX^2} = \frac{1}{\varphi_0};$$

$$\frac{du'_\omega}{dX} = 1 - \left[\left(\frac{V_0F_0'}{F_0} - 1\right)\frac{1}{\varphi_0} - \frac{g^2}{4V_0^4}\varphi_0\right]X; \qquad \frac{d^2u'_\omega}{dX^2} = -\left(\frac{V_0F_0'}{F_0} - 1\right)\frac{1}{\varphi_0} + \frac{g^2}{4V_0^4}\varphi_0.$$

Comme le rayon de courbure est donné par la formule :

$$R = \frac{\left(1 + \frac{dy}{dx}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}$$

pour une courbe $y = f(x)$, on aura, à l'origine, $X = 0$:

$$R(\alpha', X') = \frac{3}{\sqrt{2}}\varphi_0 ; \quad R(T_1', X') = 2\sqrt{2}\,\varphi_0 ;$$

$$R(\omega', X') = \frac{3}{2\sqrt{2}}\varphi_0 ; \quad R(u_\omega', X') = -\frac{2\sqrt{2}}{\left(\frac{V_0 F_0'}{F_0} - 1\right)\frac{1}{\varphi_0} - \frac{g^2}{4V_0^4}\varphi_0}$$

145. **Cas de $\mathbf{F(v) = B_n v^n}$.** — Le développement en série de la solution du problème balistique suivant l'argument x a occupé beaucoup, autrefois, les géomètres. On trouvera dans le *Traité de Balistique* de Didion, pour le cas de $n = 2$, le résumé de ces recherches.

Ainsi Lambert, en 1765, donne y jusqu'au terme en x^3 dans le crochet de la formule du n° 141.

Borda, en 1769, donne la même formule avec un arrangement différent de termes. La seule difficulté du problème est évidemment de déterminer la loi de succession des coefficients, qu'on peut calculer de proche en proche en formant les dérivées successives $\frac{d^n y}{dx^n}$. Les différentes formules se différencient donc par l'ordonnancement des termes.

Français, en 1805, est le géomètre qui a poussé le plus loin les recherches dans cette voie ; grâce à des notations toutes spéciales et même à un mode de différentiation particulier à cette seule question d'analyse, il a pu pousser très loin le développement en série, puisqu'il donne explicitement l'expression des termes en x^8 du crochet et la forme du terme général.

L'utilité de tels calculs paraît assez restreinte, vu la convergence en général peu rapide des séries et la complication croissante de leurs termes. Nous nous contenterons de donner l'équation de la trajectoire avec les termes en x^3 dans le cas de $F(v) = B_n v^n$ en posant en outre $cB_n = b_n$; elle est déduite de la formule du n° 141

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2V_0^2}\left(\frac{x}{\cos \alpha}\right)^2$$

$$- \frac{1}{1.2.3} \frac{2b_n g}{V_0^{4-n}} \left(\frac{x}{\cos\alpha}\right)^3$$

$$+ \frac{1}{1.2.3.4} \left[\frac{2(n-1)b_n g^2 \sin\alpha}{V_0^{6-n}} - \frac{2(4-n)b_n^2 g}{V_0^{6-2n}}\right] \left(\frac{x}{\cos\alpha}\right)^4$$

$$+ \frac{1}{1.2.3.4.5} \left[\frac{2(n-1)(14-3n)b_n^2 g^2 \sin\alpha}{V_0^{8-2n}} - \frac{2(n-1)b_n g^3[\cos^2\alpha + (n-2)\sin^2\alpha]}{V_0^{8-n}} - \frac{4(4-n)(3-n)b_n^3 g}{V_0^{8-3n}}\right] \left(\frac{x}{\cos\alpha}\right)^5$$

146. **Formules du tir horizontal en fonction de l'angle de projection.** — Il est utile de connaître les formules qui donnent les éléments du point de chute quand l'angle de projection α est l'argument. On peut les tirer directement des formules qui donnent les éléments de ce même point en fonction de X par la méthode du *retour des séries* dont voici un exemple.

Soit la série

$$\frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g} = X[1 + mX + nX^2]$$

où m et n sont des coefficients connus.

On posera

$$X = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}[1 + m' \sin 2\alpha + n' \sin^2 2\alpha]$$

En portant cette valeur de X dans le second membre de la première équation et identifiant les termes semblables, on aura :

$$m' + m\frac{V_0^2}{g} = 0 ; \qquad n' + mm'\frac{V_0^2}{g} + n\frac{V_0^4}{g^2} = 0$$

On en déduit m' et n' et on aura :

$$X = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}\left[1 - \frac{2}{3}\frac{cF_0}{g}\sin 2\alpha + \frac{1}{6}\frac{c^2F_0^2}{g^2}\left(\frac{V_0^2F_0'}{F_0} - \frac{4}{3}\right)\sin^2 2\alpha \dots\right]$$

On aura ensuite les autres éléments par les formules du n° 143 où on remplacera si on veut X par la valeur ci-dessus.

On peut remarquer que dans le crochet de la formule qui donne X, on peut remplacer $\sin 2\alpha$ par $2 \operatorname{tg} \alpha$, si on se borne au terme en $\sin^2 2\alpha$.

147. **Exercices**. — 1° A l'aide des formules générales du n° 141 qui donnent les éléments en fonction de x et par la méthode du *retour des séries* former les quatre groupes de formules ayant pour argument $(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \tau)$, t, $(u_0 - u)$ et y.

2° Obtenir directement ces mêmes formules par le développement de Mac-Laurin en prenant les dérivées successives des éléments par rapport à τ, t, u et y.

3° Faire leur application au cas du tir horizontal.

4° Calcul des formules du sommet.

5° Faire rentrer dans les développements de ce paragraphe, comme cas particuliers, les développements donnés pour le mouvement rectiligne (57, 58, 77).

6° Etablir les développements en série non en partant de l'équation de Mac-Laurin, mais par l'intégration par parties de l'hodographe écrit $du = \frac{c}{g}\, uF \frac{d\tau}{\cos^2 \tau}$ et des autres équations du mouvement. On a ainsi des séries où figurent les variables u, v et $\operatorname{tg} \tau$.

7° De la formule $\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{2g\, cF}{v^3 \cos^4 \tau}$ (97) déduire la for-

mule du nº 124. [On intégrera par parties l'intégrale triple qui s'introduit dans la formule $\int_0^x dx \int_0^x dx \int_0^x \frac{2gcF}{v^4 \cos^3 \tau} dx$.]

(M. de Sparre. *Mémorial de l'Art. de la Marine*, t. XXI, 1893, p. 200.)

§ 4. — Division des théories balistiques

148. **Distinction des théories analytiques et balistiques**. — L'examen qui vient d'être fait des cas très peu nombreux et très particuliers où on sait intégrer l'hodographe, et de ceux, encore bien plus rares, où on pourrait pousser le problème balistique jusqu'au bout, montre que jusqu'ici l'analyse n'a pu obtenir que très peu de résultats dans la voie d'une solution rigoureuse et complète du problème balistique; et encore, dans les quelques intégrales acquises, est-on obligé de sacrifier totalement aux nécessités analytiques la généralité de la fonction $F(v)$ de la résistance de l'air.

On a dit, dans l'Introduction (13), comment la conservation nécessaire de cette fonction s'était progressivement et impérieusement imposée aux artilleurs balisticiens, soucieux de rendre pratiques et directement utilisables pour les expériences de tir, les formules issues de leurs théories.

Les travaux poursuivis dans cette voie présentèrent tout d'abord avec Didion, de Saint-Robert, Siacci et leurs successeurs, un certain caractère de semi-empirisme qui les conduisit à remplacer par des valeurs constantes moyennes certaines quantités variables dans les équations différentielles et à demander à l'expérience la détermination des coefficients nécessaires.

Mais il est possible à l'heure actuelle, d'une part de généraliser beaucoup le principe qui est à la base de ces méthodes et d'autre part de présenter toutes les théories balistiques d'une manière absolument rigoureuse en les reliant toutes à un procédé analytique uniforme.

149. **Arcs de trajectoire**. — Si on doit renoncer à l'ambition de représenter par une forme analytique unique toute une trajectoire, depuis le point Ω à l'infini en amont de l'origine, jusqu'au point $-\frac{\pi}{2}$, extrémité de la branche descendante, il faut bien remarquer que dans la pratique de l'artillerie, on n'a pas besoin de considérer des trajectoires aussi générales et aussi étendues. La seule portion utile, limitée à la surface de la terre, est très restreinte par rapport à l'étendue totale de la courbe et se tient en somme, analytiquement parlant, dans le voisinage d'un point de cette courbe. C'est donc, en réalité, l'étude et la connaissance d'un simple arc de la trajectoire totale qui seront réellement utiles aux artilleurs, et c'est à ce problème restreint qu'ils ont consacré leurs efforts.

Une première solution consistera évidemment dans le développement en série de Mac-Laurin autour d'un point, tel qu'il a été établi au paragraphe précédent. Chaque élément de la fin de l'arc s'exprimera ainsi en fonction des puissances croissantes d'un autre de ces éléments, l'abscisse x par exemple. Mais la convergence d'une telle série sera très peu rapide, en général ; on peut d'ailleurs prévoir ce fait en remarquant que dans l'expression de y en fonction de x par exemple, la fonction F_0 n'entre qu'au 3e terme en x, puis la fonc-

tion F'_0 au 4e et ainsi de suite. C'est donc très lentement que se manifestera l'influence complète de la fonction $F(v)$ qui ne s'introduit ainsi que par parcelle dans la valeur des dérivées successives à l'origine F_0, F'_0, F''_0... Il faudra donc, ou que l'arc soit très petit, ou que le nombre de termes soit très grand, pour qu'on puisse espérer une précision satisfaisante.

150. **Les séries de la première classe.** — Mais peut-on envisager d'autres séries, où la fonction $F(v)$ entrerait dans les termes successifs sous sa forme générale? La considération de l'hodographe permet de répondre affirmativement et de donner la classification de ces solutions.

Soient

$$\frac{d(v\cos\tau)}{v d\tau} = \frac{cF(v)}{g} \quad \text{et} \quad \cos\tau\,\frac{du}{u d\tau} = \frac{c}{g}\,F\left(\frac{u}{\cos\tau}\right)$$

deux formes équivalentes de l'hodographe, puisque $u = v\cos\tau$.

D'après la première, on voit que le rapport $\frac{d(v\cos\tau)}{v d\tau}$ est toujours égal au rapport $\frac{cF(v)}{g}$; si donc ce dernier prend les valeurs o ou ∞, on obtiendra immédiatement comme intégrales du mouvement soit $du = 0$, soit $d\tau = 0$.

Ces deux cas-limites correspondent aux deux problèmes traités au Livre I du *Mouvement dans le vide* et du *Mouvement rectiligne horizontal*.

Mais ces intégrales limites seront évidemment, dans le problème balistique, les premiers termes de deux séries qui correspondront la première au développement sui-

vant les puissances de $\frac{c}{g}$ et la seconde au développement suivant les puissances de $\frac{g}{c}$. Et, dans chacune d'elles, la fonction $F(v)$ s'introduira immédiatement dans les intégrales qui définiront les termes successifs. Au contraire de la série de Mac-Laurin qui procède par différentiations successives, c'est par intégrations successives que ces séries formeront leurs termes. On conçoit bien ainsi quel avantage de tels développements devront présenter sur celui de Mac-Laurin.

Comme en un point quelconque de la trajectoire, le rapport $\frac{cF}{g}$ sera, ou plus petit, ou plus grand que 1, l'un des deux développements y sera valable certainement, à l'exclusion de l'autre.

Si ces solutions peuvent généralement servir au calcul d'un arc de trajectoire quelconque, il est certains cas pratiques où elles permettront le calcul de la trajectoire tout entière, de l'origine au point de chute. De là les noms qui dans l'exposé des théories balistiques sont donnés à ces deux solutions savoir :

Tir tendu à grande vitesse lorsque $\frac{cF}{g} > 1$

Tir courbe à faible vitesse lorsque $\frac{cF}{g} < 1$

151. **Les séries de la deuxième classe.** — Dans l'équation de l'hodographe sous sa deuxième forme :

$$\cos\tau \frac{du}{ud\tau} = \frac{c}{g} F\left(\frac{u}{\cos\tau}\right),$$

l'angle τ n'entre que sous le signe cosinus. Or, on connaît

le développement de Taylor de cette fonction en série convergente dans le voisinage d'une valeur initiale cos α. Ce développement peut être porté dans l'équation différentielle de l'hodographe, ce qui en permettra le développement en série. L'intégration de chaque terme successivement donnera l'intégrale de la fonction inconnue sous forme d'une série de fonctions qui sera également convergente.

Par ce procédé et moyennant donc une série auxiliaire empruntée à la trigonométrie, on obtiendra un développement valable en tout point d'une trajectoire et où la fonction $F(v)$ entrera encore sous le signe $\int$ avec toute sa généralité.

Mais cette solution générale et déjà intéressante admet un cas particulier qui en réalité constitue de beaucoup le plus important des problèmes que se pose la Balistique pratique : il correspond au cas où l'angle τ, sur tout l'arc de trajectoire utilisé, reste voisin de zéro, c'est-à-dire lorsqu'on se trouve placé près du sommet de la trajectoire. C'est le cas du tir ordinaire des canons, en particulier de tous ceux de Marine.

Alors cos τ se développe par rapport à la valeur zéro sous la forme

$$\cos\tau = 1 - \frac{\tau^2}{2} + \cdots$$

L'absence du terme en τ permet d'escompter un développement en série particulièrement convergent pour la solution de ce problème qui sera désigné sous le nom de *Tir de plein fouet*.

Deux autres cas particuliers, issus de la même série trigonométrique, s'aperçoivent immédiatement ; c'est lorsque l'inclinaison τ reste toujours très voisine de

$\pm \frac{\pi}{2}$, auquel cas $\cos \tau$ est très voisin de zéro, mais est tel qu'en posant $\tau = \pm \frac{\pi}{2} - \theta$, on peut écrire

$$\cos \tau = \pm \theta \left(1 - \frac{\theta^2}{1.2.3} + \ldots\right).$$

A ces deux hypothèses correspondent deux séries qui ont pour cas-limites le *Mouvement vertical ascendant* et le *Mouvement vertical descendant*. (Livre I).

152. **Séries de la troisième classe.** — La classification précédente n'épuise pas le nombre de cas où il est possible d'intégrer, par les séries, le problème balistique. Mais, tandis que les deux méthodes précédentes (développement suivant les puissances de $\frac{c}{g}$, ou développement trigonométrique) étaient valables en un point quelconque de la trajectoire, les séries restantes sont tout à fait particulières à un point spécial d'une trajectoire.

En certains points, en effet, de toute trajectoire, on connaît immédiatement une intégrale du mouvement. Ainsi, au point de vitesse minimum, on sait que la vitesse v est égale à v_m, vitesse minimum ; or dans le voisinage de ce point on peut également prendre $v = v_m$ en première approximation. Ainsi, au point de rayon de courbure minimum, la trajectoire pourra être, en première approximation, assimilée à son cercle osculateur qui a quatre points de communs avec elle. Ainsi encore vers l'extrémité de la branche descendante le mouvement suivant l'axe des y sera presque uniforme et par suite on aura $y = v't$ en première approximation, etc.

Ces hypothèses, portées dans les équations différentielles du mouvement, permettront de déterminer les premiers termes de séries valables dans des régions voisines de celle affectée de la singularité qui sert de définition à la région.

153. **Division générale des théories balistiques**. — Le tableau suivant résume la discussion précédente des séries que l'on peut calculer pour la solution du problème balistique.

1re classe. — Séries ordonnées suivant les puissances du coefficient balistique c.

1° *Puissances ascendantes* $\frac{cF}{g} > 1$. TIR TENDU A GRANDE VITESSE.

2° *Puissances descendantes* $\frac{cF}{g} < 1$. TIR COURBE A FAIBLE VITESSE.

2e classe. — Séries résultant d'un développement trigonométrique. Série générale dite « LES FONCTIONS DE SIACCI AUTOUR D'UN POINT ».

Cas particuliers
- $\tau = 0$. TIR DE PLEIN FOUET.
- $\tau = \frac{\pi}{2}$. TIR VERTICAL DE BAS EN HAUT.
- $\tau = -\frac{\pi}{2}$. TIR VERTICAL DE HAUT EN BAS.

3e classe. — Séries spéciales autour d'un point remarquable.

1° TIR AU VOISINAGE DE LA VITESSE MINIMUM.

2° TIR AU VOISINAGE DU POINT DE COURBURE MINIMUM.

3° TIR SUR LA BRANCHE ASYMPTOTIQUE DESCENDANTE.

Etc.

Dans l'exposition qui va suivre, nous proportionnerons les développements à l'importance pratique des problèmes traités. Ainsi, le *Tir de plein fouet* occupera une place prépondérante et sera traité en lui-même ; la série plus générale dont il dérive « *Les fonctions de Siacci autour d'un point* » sera considérée alors comme la généralisation de ce tir. Enfin, un certain nombre de ces séries d'une utilité pratique presque nulle seront simplement proposées comme exercices.

D'après cela, à la division théorique qui vient d'être donnée, on est, dans un exposé qui n'est pas purement spéculatif, amené à substituer la division suivante :

LIVRE IV. *Le tir de plein fouet.*

LIVRE V. *Les séries balistiques.*

1° Les fonctions de Siacci autour d'un point.

2° Le tir tendu à grande vitesse.

3° Le tir courbe à faible vitesse.

154. **Cas d'une résistance proportionnelle à une puissance de la vitesse**. — Dans les exposés généraux qui font l'objet des deux premiers Livres, nous avons, à chaque instant, comparé la trajectoire générale du cas de $F(v)$ quelconque, à la trajectoire $B_n v^n$ qu'on peut lui substituer en un point déterminé. D'autre part cette trajectoire $B_n v^n$ se présente tout naturellement lorsqu'il s'agit de faire l'application d'une formule générale ou d'illustrer par un exemple un théorème démontré avec la fonction $F(v)$.

Enfin, dans l'introduction, nous avons dit quel rôle important dans l'histoire du développement des théories balistiques avait joué l'hypothèse d'une résistance monôme. D'ailleurs l'application pratique des solutions

qui dérivent de cette hypothèse ne peut être considérée comme épuisée, même à l'heure actuelle, et comme dénuée de tout intérêt.

Pour toutes ces raisons, il paraît indispensable de traiter avec détail le problème balistique dans l'hypothèse d'une résistance monôme. Ce sera l'objet du Livre III.

LIVRE III

RÉSISTANCE MONÔME

CHAPITRE VII

LA THÉORIE D'EULER

§ 1er. — Intégration de l'hodographe

155. **Formes monômes de la résistance de l'air.** — Les premières recherches théoriques sur la loi de la résistance de l'air avaient conduit les savants à admettre, avec Newton, la proportionnalité de cette résistance au carré de la vitesse. L'expérience n'est pas, du reste, ainsi qu'on l'a dit (12) en désaccord formel avec cette conclusion, tant qu'on s'en tient aux faibles vitesses réalisées dans le tir des mortiers.

En adoptant la loi quadratique comme base de la solution du problème balistique, on peut établir les tables de tir de ces bouches à feu dans des conditions assez satisfaisantes d'exactitude. Cela tient à ce que la vitesse des projectiles des mortiers varie de 100 à 250 mètres environ et que dans la région de ces vitesses, la courbe des $f(v)$ présentant un minimum (11) les variations de cette fonction sont très faibles, ce qui

permet de considérer la résistance comme quadratique.

Quand on utilisa, dans les canons, des vitesses plus considérables que celles employées avec les mortiers, la loi quadratique dut être abandonnée comme insuffisante pour rendre compte des faits balistiques. Diverses expressions monômes de la loi de résistance furent alors proposées ou employées. C'est ainsi que successivement, on a mis en avant les lois du cube, des 4e, 5e et même 6e puissances de la vitesse pour représenter, soit dans toute son étendue, soit entre des limites de vitesses bien déterminées, la loi de résistance de l'air. On a donné (12) l'explication de ces interprétations successives et montré l'insuffisance, en général, d'une représentation aussi simple.

156. **Généralité de la théorie d'Euler**. — Au point de vue de la théorie, la loi du carré ne se distingue pas des autres lois monômes qui réduisent la fonction $F(v)$ à la forme $B_n v^n$. En effet, l'hypothèse de la proportionnalité de la résistance à une puissance quelconque de la vitesse, permet d'aborder analytiquement le problème balistique, et d'en donner une solution complète, rigoureuse et générale, sinon sous forme de relations explicites entre les divers éléments de la trajectoire, du moins sous forme de tables d'un usage commode et d'une étendue restreinte.

C'est à Euler qu'on doit le principe de la construction de ces tables, et la solution qu'il a donnée du problème balistique dans le cas d'une résistance quadratique a été le premier progrès accompli dans l'étude du mouvement d'un projectile dans un milieu résistant. Avant cette époque, la théorie du mouvement dans le

vide était seule connue et employée pour l'établissement des tables de tir.

Des tables fondées sur la théorie même d'Euler ou sur sa généralisation immédiate ont été effectivement calculées pour des lois de résistance quadratique, cubique et biquadratique. Le principe commun qui a servi à la construction de ces tables résulte de propriétés générales qui subsistent quel que soit l'exposant n admis dans l'expression de la résistance de l'air. C'est l'ensemble de ces propriérés qui constitue la *théorie d'Euler*.

L'étude du problème balistique dans le cas d'une résistance $F(v) = B_n v^n$ (forme incompatible avec la fonction $F(v)$ dans toute son étendue), outre son importance historique, présente de multiples raisons d'intérêt pratique : application possible au cas du tir des mortiers ; formules légitimes pour des régions limitées de la courbe $F(v)$, ou pour des portions restreintes de trajectoires ; discussion de problèmes inabordables par une autre voie et enfin possibilité d'appliquer les méthodes de cette théorie au calcul par arcs d'une trajectoire quelconque où $F(v)$ sera la fonction expérimentale réelle.

157. Équations différentielles du mouvement. — Les équations différentielles du mouvement principal étant celles du n° 88, savoir :

$$\frac{d(v\cos\tau)}{d\tau} = \frac{cvF}{g}, \qquad dx = -\frac{1}{g}v^2 d\tau,$$

$$dt = -\frac{1}{g}\frac{v\,d\tau}{\cos\tau}, \qquad dy = -\frac{1}{g}v^2 \operatorname{tg}\tau\, d\tau,$$

L'intégration de ces équations donnera la solution du problème balistique.

On se donne les conditions initiales du mouvement, c'est-à-dire la *vitesse initiale* V_0, l'*angle de projection* α, le *coefficient balistique* c. Il s'agit de déterminer la trajectoire du projectile et la loi du mouvement sur cette trajectoire, c'est-à-dire de rechercher quelles sont, au *temps* t, les *coordonnées* x,y du projectile, la *vitesse* v au point x,y et l'*inclinaison* τ de la tangente à la trajectoire en ce point.

Dans la théorie d'Euler, la fonction $F(v)$ prend la forme $B_n v^n$, B_n et n étant deux constantes. On posera en outre $cB_n = b_n$.

L'équation différentielle de l'hodographe

$$\frac{d(v\cos\tau)}{d\tau} = \frac{cvF}{g}$$

deviendra donc

$$\frac{d(v\cos\tau)}{d\tau} = \frac{b_n}{g}\, v^{n+1}.$$

La solution d'Euler dérive tout entière de la possibilité qu'on a d'intégrer cette équation différentielle. On a déjà dit (90) que cette condition était suffisante pour ramener le problème aux quadratures et que, si de l'équation de l'hodographe on pouvait tirer $v = \Psi(\tau)$, les autres éléments de la trajectoire s'exprimaient en fonction de τ, par les quadratures :

$$= -\frac{1}{g}\int_\alpha^\tau \Psi(\tau)\,\frac{d\tau}{\cos\tau}; \qquad x = -\frac{1}{g}\int_\alpha^\tau \overline{\Psi^2(\tau)}\,d\tau;$$

$$y = -\frac{1}{g}\int_\alpha^\tau \overline{\Psi^2(\tau)}\,\mathrm{tg}\,\tau\,d\tau.$$

158. **Intégration de l'hodographe**. — Or, dans le cas actuel, l'intégration de l'hodographe est extrêmement aisée. Écrivons en effet cette équation sous la forme identique

$$\frac{g}{b_n} \frac{d(v \cos \tau)}{v^{n+1} \cos^{n+1} \tau} = \frac{d\tau}{\cos^{n+1} \tau}$$

et prenons pour variable la vitesse horizontale $u = v \cos \tau$. Il viendra :

$$\frac{g}{b_n} \frac{du}{u^{n+1}} = \frac{d\tau}{\cos^{n+1} \tau}.$$

La séparation des variables se trouve effectuée et le problème est réduit aux deux quadratures de chaque membre.

D'une part, l'intégrale $\int \frac{du}{u^{n+1}}$ a pour expression générale $-\frac{1}{nu^n}$. D'autre part, posons, comme définition d'une fonction de τ :

$$\xi_n(\tau) = \int_0^\tau \frac{d\tau}{\cos^{n+1} \tau}.$$

Si on prend alors un arc de trajectoire défini à l'origine par les valeurs V_0 et α et à son autre extrémité par les valeurs v et τ, on obtiendra l'hodographe intégré sous la forme

$$\frac{g}{nb_n} \frac{1}{u^n} + \xi_n(\tau) = \frac{g}{nb_n} \frac{1}{u_0^n} + \xi_n(\alpha).$$

159. **Expression de $\xi_n(\tau)$**. — Dans le cas où *n est entier*, on peut exprimer $\xi_n(\tau)$ sous forme explicite.

Écrivons, en effet

$$\xi_n(\tau) = \int_0^\tau \frac{d\tau}{\cos^{n+1}\tau} = \int_0^\tau \frac{1}{\cos^{n-1}\tau}\frac{d\tau}{\cos^2\tau}$$

et intégrons par parties; il viendra :

$$\xi_n(\tau) = \operatorname{tg}\tau \frac{1}{\cos^{n-1}\tau} - (n-1)\int_0^\tau \operatorname{tg}\tau \frac{\sin\tau}{\cos^n\tau}\,d\tau$$

ou bien :

$$\xi_n(\tau) = \frac{\sin\tau}{\cos^n\tau} - (n-1)\int_0^\tau \frac{1-\cos^2\tau}{\cos^{n+1}\tau}\,d\tau$$

$$= \frac{\sin\tau}{\cos^n\tau} - (n-1)\int_0^\tau \frac{d\tau}{\cos^{n+1}\tau} + (n-1)\int_0^\tau \frac{d\tau}{\cos^{n-1}\tau}$$

d'où la formule de récurrence :

$$\xi_n(\tau) = \frac{\sin\tau}{n\cos^n\tau} + \frac{n-1}{n}\xi_{n-2}(\tau)$$

Mais d'autre part, on connaît directement les deux intégrales qui correspondent à $n = 0$ et à $n = 1$ et qui sont (18) :

$$\xi_0(\tau) = \int_0^\tau \frac{d\tau}{\cos\tau} = \operatorname{Log}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2}\right)$$

$$\xi_1(\tau) = \int_0^\tau \frac{d\tau}{\cos^2\tau} = \operatorname{tg}\tau.$$

On pourra donc calculer successivement et de proche en proche les expressions des fonctions $\xi_n(\tau)$ pour toutes les valeurs entières de n [1].

[1] A remarquer les deux expressions de $\xi_n(\tau)$ pour $n = -1$ et $n = -2$.

$$\xi_{-1}(\tau) = \int_0^\tau d\tau = \tau$$

$$\xi_{-2}(\tau) = \int_0^\tau \cos\tau\,d\tau = \sin\tau.$$

Ainsi on trouverait :

$$\xi_2(\tau) = \int_0^\tau \frac{d\tau}{\cos^3\tau} = \frac{\sin\tau}{2\cos^2\tau} + \frac{1}{2}\,\text{Log tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2}\right)$$

$$\xi_3(\tau) = \int_0^\tau \frac{d\tau}{\cos^4\tau} = \frac{\sin\tau}{3\cos\tau}\left[\frac{1}{\cos^2\tau} + 2\right]$$

. . . .

et ainsi de suite, les fonctions impaires ne renfermant que des lignes trigonométriques, et les fonctions paires contenant en outre la fonction $\xi_0(\tau) = \text{Log tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2}\right)$.

Les expressions générales de $\xi_n(\tau)$ peuvent d'ailleurs s'écrire de la manière suivante :

n pair :

$$\xi_n(\tau) = \int_0^\tau \frac{d\tau}{\cos^{n+1}\tau} = \frac{\sin\tau}{n}$$

$$\left[\frac{1}{\cos^n\tau} + \frac{n-1}{n-2}\frac{1}{\cos^{n-2}\tau} + \frac{n-3}{n-4}\frac{1}{\cos^{n-4}\tau} \cdots + \frac{3.5\ldots(n-1)}{2.4\ldots(n-2)}\frac{1}{\cos^2\tau} + \frac{1.3\ldots(n-1)}{2.4\ldots n}\,\text{Log tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2}\right)\right]$$

n impair :

$$\xi_n(\tau) = \int_0^\tau \frac{d\tau}{\cos^{n+1}\tau} = \frac{\sin\tau}{n}$$

$$\left[\frac{1}{\cos^n\tau} + \frac{n-1}{n-2}\frac{1}{\cos^{n-2}\tau} + \frac{n-3}{n-4}\frac{1}{\cos^{n-4}\tau} \cdots + \frac{2.4\ldots(n-1)}{1.3\ldots(n-2)}\frac{1}{\cos\tau}\right]$$

On peut observer que la fonction $\xi_n(\tau)$ est une fonction *impaire*, qui change de signe, mais non de valeur absolue quand on change τ en $-\tau$. Cela résulte des expressions ci-dessus ; car (pour n impair) $\xi_n(\tau)$ change de signe comme le sinus, et (pour n pair) $\xi_n(\tau)$ change de signe comme le sinus

et comme $\operatorname{Log} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\tau}{2}\right)$. Ce logarithme est évidemment égal à $-\operatorname{Log} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\tau}{2}\right)$ puisque la somme des arcs est $\frac{\pi}{2}$.

Ainsi donc, dans tous les cas où n sera entier, on pourra, en portant les expressions précédentes de $\xi_n(\tau)$ dans l'intégrale de l'hodographe, avoir une forme explicite de cette équation et, abstraction faite des difficultés ultérieures du calcul, obtenir, soit v en fonction de τ soit τ en fonction de v.

Si on veut avoir, non plus l'expression en termes explicites de la vitesse en fonction de τ, mais seulement la valeur numérique de v on pourra, au lieu d'opérer, dans chaque cas particulier, le calcul de l'intégrale, dresser une fois pour toutes une table de la fonction $\xi_n(\tau)$ correspondant à chaque valeur de n (de telles tables existent pour des valeurs de n jusqu'à $n = 6$).

160. **Développements de $\xi_n(\tau)$ en série.** — D'ailleurs si on suppose n fractionnaire ou quelconque, cas où l'expression en termes finis de l'intégrale $\xi_n(\tau)$ n'est pas connue, on pourra toujours construire des tables analogues, en prenant par exemple pour base le développement de $\xi_n(\tau)$ en série.

1° Si dans l'intégrale $\int_0^\tau \frac{d\tau}{\cos^{n+1}\tau}$, on remplace $\cos\tau$ par son développement

$$\cos\tau = 1 - \frac{\tau^2}{1.2} + \frac{\tau^4}{1.2.3.4} - \frac{\tau^6}{1.2.3.4.5.6} + \cdots$$

il vient, en intégrant chaque terme séparément,

$$\xi_n(\tau) = \tau + \frac{1}{3}\frac{1}{2}(n+1)\tau^3$$
$$-\frac{1}{5}\left[\frac{1}{4\,!} - \frac{n+2}{2\,!}\left(\frac{1}{2}\right)^2\right](n+1)\tau^5$$

$$+\frac{1}{7}\left[\frac{1}{6!}-\frac{n+2}{2!}\frac{1}{4!}+\frac{(n+2)(n+3)}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3\right](n+1)\tau^7.$$

$-\ldots\ldots$

Exercices. — 1° Vérifier que pour $n=-1$, on a $\xi_n(\tau)=\tau$; pour $n=-2$, on a le développement du sinus; pour $n=1$, le développement de la tangente

$$\operatorname{tg}\tau=\tau+\frac{\tau^3}{3}+\frac{2\tau^5}{15}+\frac{17}{315}\tau^7+\cdots$$

2° On pourra obtenir une autre série en prenant pour argument au lieu de τ la tangente $\operatorname{tg}\tau$.

On a en effet: $d\tau=\dfrac{d\operatorname{tg}\tau}{1+\operatorname{tg}^2\tau}$ et $\dfrac{1}{\cos^2\tau}=1+\operatorname{tg}^2\tau.$

Par suite

$$\frac{d\tau}{\cos^{n+1}\tau}=(1+\operatorname{tg}^2\tau)^{\frac{n-1}{2}}\,d\operatorname{tg}\tau.$$

La formule du binôme donnera :

$$(1+\operatorname{tg}^2\tau)^{\frac{n-1}{2}}=1+\frac{n-1}{2}\operatorname{tg}^2\tau+\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-3}{2}\cdot\frac{\operatorname{tg}^4\tau}{2!}$$
$$+\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-3}{2}\cdot\frac{n-5}{2}\cdot\frac{\operatorname{tg}^6\tau}{3!}+\cdots$$

La valeur de $\xi_n(\tau)$ sera donc la suivante en fonction de $\operatorname{tg}\tau$:

$$\xi_n(\tau)=\operatorname{tg}\tau+\frac{n-1}{2}\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\tau+\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-3}{2}\cdot\frac{1}{5}\frac{\operatorname{tg}^5\tau}{2!}$$
$$+\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-3}{2}\cdot\frac{n-5}{2}\cdot\frac{1}{7}\frac{\operatorname{tg}^7\tau}{3!}+\cdots$$

Cette série a un nombre limité de termes si *n est impair*.

Démontrer l'identité de cette expression de $\xi_n(\tau)$ avec l'expression générale donnée au n° 159 pour n impair (admettre que le théorème est vrai pour n et montrer qu'il est encore vrai pour $(n+2)$; vérifier directement qu'il y a identité pour $n=1$ et $n=3$).

161. **Étude de l'hodographe**. — On peut, dans le cas particulier actuel où on sait intégrer l'hodographe, retrouver directement toutes les propriétés de cette courbe établies au § I du Chapitre IV.

On écrira l'intégrale de l'hodographe :

$$\frac{g}{nb_n u^n} + \xi_n(\tau) = Q \quad \text{en posant} \quad Q = \frac{g}{nb_n u_0^n} + \xi_n(\alpha).$$

Q est ainsi, pour un projectile donné (b_n connu), une fonction des données à l'origine V_0 et α.

La relation qui, dans l'intégrale, relie v, τ et Q subsiste en chaque point de la trajectoire, de sorte qu'en donnant à α et V_0 différentes valeurs corrélatives, on pourra obtenir diverses expressions ou définitions du *paramètre* Q.

a) Faisons par exemple $V_0 = \infty$; le premier terme du second membre s'annule et en désignant par Θ la valeur que prend τ, on a : $Q = \xi_n(\Theta)$. L'inclinaison définie par l'angle Θ correspond à l'asymptote de l'hodographe.

b) Faisons encore $\alpha = 0$; on est au sommet de la trajectoire où $v = V_s$ et Q satisfait à la relation

$$Q = \frac{g}{nb_n V_s^n}.$$

c) Cherchons directement la valeur de v au point $\tau = -\frac{\pi}{2}$. En ce point $\xi_n(\tau)$ devient égal à $-\infty$ et u^{-n} à $+\infty$; l'expression de Q se présente sous la forme $(\infty - \infty)$. Écrivons identiquement.

$$\frac{1}{n\cos^n\tau}\left[\frac{g}{b_n v^n} + \frac{n\xi_n(\tau)}{\cos^{-n}\tau}\right] = Q.$$

La vraie valeur de l'expression $\frac{n\xi_n(\tau)}{\cos^{-n}\tau}$, qui se présente sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$, s'obtiendra en prenant les dérivées des deux termes, ce qui donnera $\frac{\frac{n}{\cos^{n+1}\tau}}{n\cos^{-n-1}\tau\sin\tau}$ c'est-à-dire -1, pour $\tau = -\frac{\pi}{2}$

On a donc, en ce point :

$$\frac{1}{n\cos^n\tau}\left[\frac{g}{b_n v^n} - 1\right] = Q.$$

Or le facteur $\frac{1}{n\cos^n\tau}$ tend vers ∞ pour $\tau = -\frac{\pi}{2}$. Pour que le produit reste égal à Q, il est nécessaire que le second facteur s'annule.

Au point $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, on aura donc $b_n v'^n = g$, ce qui est bien la relation connue $cF(v') = g$.

162. **Théorème**. — *Si deux projectiles ont des coefficients balistiques différents, mais même valeur de Q, leurs hodographes sont semblables.*

En effet, on aura pour le premier projectile b_n, au point (v, τ) :

$$\frac{g}{nb_n v^n \cos^n\tau} = Q - \xi_n(\tau)$$

et pour le second b'_n, au point (v_1, τ) :

$$\frac{g}{nb'_n v_1^n \cos^n\tau} = Q - \xi_n(\tau)$$

d'où en divisant membre à membre : $b_n v^n = b'_n v_1^n$,

c'est-à-dire $$\frac{v}{v_1} = \sqrt[n]{\frac{b'_n}{b_n}}.$$

Ce radical est ainsi le rapport de similitude des deux hodographes.

D'après cela, les deux paramètres déterminant un hodographe sont (Q ou Θ) et (b_n ou v', vitesse terminale.) La connaissance de ces deux nombres suffit pour caractériser complètement la courbe.

L'hodographe peut s'écrire en fonction des deux paramètres Q et v' :

$$\frac{1}{n \cos^n \tau}\left(\frac{v'}{v}\right)^n + \xi_n(\tau) = Q.$$

163. **Exercices**. — *Théorèmes à démontrer*. — 1° Si on prend sur la branche ascendante de la trajectoire et sur la branche descendante les points d'inclinaison τ et $-\tau$, on a entre les vitesses horizontales en ces points et la vitesse V_s au sommet la relation

$$\frac{2}{V_s^n} = \frac{1}{u_\tau^n} + \frac{1}{u_{-\tau}^n}.$$

Après le point $-\Theta$, associé du point $+\Theta$, on doit, pour étendre le théorème, considérer un point de la branche descendante et un point de la branche isolée, ayant même inclinaison $-\tau$. On a alors :

$$\frac{2}{V_s^n} = \frac{1}{u_\tau^n} - \frac{1}{u_{-\tau}^n} \quad \begin{matrix}(u_\tau \text{ s'applique à la branche descendante})\\ (u_{-\tau} \text{ s'applique à la branche isolée}).\end{matrix}$$

2° Les points (v_m, τ_m) de vitesse minimum sont donnés par l'équation

$$Q = \xi_n(\tau) - \frac{1}{n \sin \tau \cos^n \tau}$$

Les *trajectoires avec sommet* exigeant que Q soit positif, trouver la limite de l'angle τ_m où peut se produire le point de vitesse minimum pour ces trajectoires.

[On a pour un tir horizontal avec une vitesse infinie, $Q = 0$ d'où

$$\sin \tau \cos^n \tau \, \xi_n(\tau) = \frac{1}{n}.$$

On trouve les valeurs suivantes :

$n =$	1	2	3	4	5 ...
$\tau_m =$	90°	56°30	45°	38°30	34°18...

3° Le point (v_n, τ_n) de vitesse verticale minimum sur la branche isolée est donné par la formule :

$$Q = \xi_n(\tau) - \frac{\sin \tau}{n \cos^n \tau}.$$

4° Quand, pour un même projectile (b_n ou v' constant), Q varie, le lieu des points d'inflexion de l'hodographe (c'est-à-dire le lieu des points de vitesse minimum) a pour équation $\left(\frac{v}{v'}\right)^n = \sin \tau$. Pour $n = 1$, c'est un cercle.

5° Dans les mêmes conditions (Q variant) le lieu des points (v_n, τ_n) où la tangente à l'hodographe est verticale est la transformée par rayons vecteurs réciproques de la courbe précédente.

6° La tangente en un point de la courbe des inflexions a pour expression $\operatorname{tg} I = n \operatorname{tg} \tau$.

7° Quand Q varie, la tangente au point d'inflexion de l'hodographe enveloppe une certaine courbe. Soit M le point d'inflexion, N le point où la tangente en M rencontre la verticale $\left(\tau = -\frac{\pi}{2}\right)$; soit I le point où la tangente touche son enveloppe. Démontrer géométriquement qu'on a $\frac{IM}{NM} = \frac{1}{n}$.

§ 2. — Les trajectoires d'Euler

164. Expression des éléments d'un arc. — Nous avons vu que le problème balistique, en *théorie* réduit aux quadratures lorsque l'hodographe était intégré, l'était

effectivement et immédiatement si on pouvait tirer de l'intégrale de l'hodographe v sous la forme $v = \Psi(\tau)$.

Or, c'est ce qui a lieu dans le cas actuel où $F(v) = B_n v^n$. Puisqu'on a, en effet,

$$\frac{g}{nb_n u^n} + \xi_n(\tau) = Q$$

on en tirera, en remplaçant u par $v \cos \tau$:

$$v = \Psi(\tau) = \left[\frac{nb_n}{g}\right]^n \frac{1}{\cos \tau}\left[Q - \xi_n(\tau)\right]^{-\frac{1}{n}}.$$

En portant cette valeur de $\Psi(\tau)$ dans les équations du n° 88, il viendra le système suivant :

$$\left[\frac{nb_n}{g}\right]^{\frac{1}{n}} v = \left[Q - \xi_n(\tau)\right]^{-\frac{1}{n}} \frac{1}{\cos \tau}$$

$$\left[\frac{nb_n}{g}\right]^{\frac{1}{n}} gt = -\int_\alpha^\tau [Q - \xi_n(\tau)]^{-\frac{1}{n}} \frac{d\tau}{\cos^2 \tau}$$

$$\left[\frac{nb_n}{g}\right]^{\frac{2}{n}} gx = -\int_\alpha^\tau [Q - \xi_n(\tau)]^{-\frac{2}{n}} \frac{d\tau}{\cos^2 \tau}$$

$$\left[\frac{nb_n}{g}\right]^{\frac{2}{n}} gy = -\int_\alpha^\tau [Q - \xi_n(\tau)]^{-\frac{2}{n}} \operatorname{tg} \tau \frac{d\tau}{\cos^2 \tau}.$$

Au moyen des quadratures indiquées dans les seconds membres, il serait possible de calculer une trajectoire particulière définie par les éléments initiaux V_0, α et c. Ces éléments suffisent, en effet, pour déterminer la constante Q et le calcul des intégrales pourrait alors s'effectuer par une des méthodes de quadrature que l'on connaît.

Mais les calculs devraient être repris dans chaque cas particulier, de sorte qu'on serait loin, si la théorie se

bornait à ces formules, d'une solution vraiment pratique du problème. Une étude plus complète du sujet va permettre d'apercevoir de notables simplifications ; des relations très simples existent, en effet, entre les diverses trajectoires qui jusqu'à présent paraissent sans dépendances mutuelles.

165. **Trajectoire complète.** — Les deux paramètres Q et b_n étant connus, et reliés en chaque point de la trajectoire par l'équation de l'hodographe, les différents éléments de la trajectoire donnés par les formules précédentes ne dépendent plus alors des données initiales que par la limite arbitraire α de l'intégrale du deuxième membre. Ces formules sont donc propres à représenter, non seulement la portion restreinte de trajectoire située au-dessus de l'horizontale qui passe par la bouche de la pièce, ayant pour données à l'origine V_0 et α et limitée au point de chute, mais la trajectoire complète qui s'étend tant au-dessus qu'au-dessous du plan horizontal de la bouche.

On peut supposer le calcul de cette trajectoire effectué par des moyens quelconques de quadrature et les nombres qui en résultent mis sous forme d'une table qui aurait le double titre $Q = \dots$ et $b_n = \dots$, valeurs des deux paramètres caractérisant la trajectoire particulière étudiée.

On prendrait, par exemple, pour origine le sommet où on a :

$$v = V_s = \left[\frac{g}{nb_nQ}\right]^{\frac{1}{n}}$$

et où on supposerait $x = y = t = 0$. On calculerait

ainsi des arcs sur la branche *ascendante* par des formules telles que la suivante pour l'abscisse

$$\left[\frac{nb_n}{g}\right]^{\frac{2}{n}} gx = -\int_{\tau}^{0} \left[Q - \xi_n(\tau)\right]^{-\frac{2}{n}} \frac{d\tau}{\cos^2\tau}$$

et les arcs correspondant à la valeur — τ sur la branche *descendante* par la formule :

$$\left[\frac{nb_n}{g}\right]^{\frac{2}{n}} gx = -\int_{0}^{-\tau} \left[Q - \xi_n(\tau)\right]^{-\frac{2}{n}} \frac{d\tau}{\cos^2\tau}.$$

On pourrait alors calculer et dresser la table suivante :

Trajectoire { $Q =$; $b_n =$ }	τ	x	y	t	v	
	.	.	.	.	.	
Branche ascendante.	55°	x_{55}	y_{55}	t_{55}	v_{55}	Les abscisses, les ordonnées et les temps sont comptés à partir du sommet.
	54°	x_{54}	y_{54}	t_{54}	v_{54}	
	.	.	.	.	.	
	.	.	.	.	.	
	.	.	.	.	.	
	1°	x_1	y_1	t_1	v_1	
Sommet.	0	0	0	0	V_s	
Branche descendante.	-1°	x_{-1}	y_{-1}	t_{-1}	v_{-1}	
	.	.	.	.	.	
	.	.	.	.	.	
	.	.	.	.	.	
	-55°	x_{-55}	y_{-55}	t_{-55}	v_{-55}	
	.	.	.	.	.	

Cette table permettrait de calculer immédiatement telle portion qu'on voudra de la trajectoire (Q, b_n), portion que définissent les deux valeurs τ aux extrémités de l'arc ou deux valeurs de x, y, t ou v. Pour avoir, par exemple, les éléments du point de chute de la trajectoire

(Q, b_n) qui a un angle de projection de 55°, il suffit de chercher sur la branche descendante la valeur $y_{-\omega}$ qui est égale à y_{55} pour obtenir dans la ligne horizontale tous les éléments nécessaires pour calculer le point de chute. On aura :

$$X = x_{55} + x_{-\omega}; \quad T = t_{55} + t_{-\omega}; \quad \tau = -\omega; \quad V_{\omega} = v_{-55}.$$

166. **Les deux familles de trajectoires d'Euler.** — Les éléments à l'origine V_0 et α, particuliers à une trajectoire, ayant été éliminés par les considérations qui précèdent, on voit que toutes les trajectoires possibles ne dépendent plus que de deux paramètres Q et b_n.

On peut par suite distinguer toutes les trajectoires en *deux familles* dont la première sera définie par la condition Q = constante et la seconde par la condition b_n = constante.

Dans chacune de ces familles existe encore une infinité de trajectoires, mais qui ne dépendent plus que d'une seule variable b_n ou Q, suivant que l'on considère l'une ou l'autre famille.

167. **Similitude des trajectoires.** — L'ensemble des propriétés communes à toutes les trajectoires de la famille Q = constante, constitue la théorie qu'on désigne sous le nom de *similitude* des trajectoires et que résument les théorèmes suivants :

1° *Théorème I. — L'accélération totale en un point d'une trajectoire Q = constante, ne dépend que de l'inclinaison τ de la tangente à la trajectoire en ce point.*

En effet, l'accélération totale est formée par la composition de l'accélération tangentielle qui dans le cas pré-

sent est $b_n v^n$ et de la pesanteur g. Or, d'après l'équation de l'hodographe :

$$b_n v^n = \frac{g}{n \cos^n \tau \left[Q - \xi_n(\tau)\right]},$$

si Q = constante, l'accélération $b_n v^n$ ne dépend que de l'inclinaison τ.

Sur deux trajectoires Q = constante, au point de même inclinaison τ, on aura donc les deux composantes $b_n v^n$ et g égales et parallèles. Il en sera de même de leur résultante. c q. f. d.

Deux points de même inclinaison τ sur deux trajectoires Q = constante différentes sont dits *homologues*.

2° *Théorème II. — Les droites qui joignent deux à deux les points homologues passent par le même point.*

Soient AA_1 et BB_1 deux systèmes de points homologues infiniment voisins sur deux trajectoires Q = constante. Par suite de l'égalité des inclinaisons τ, les deux segments AB et A_1B_1 sont parallèles.

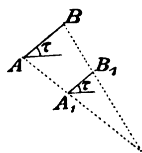


Fig. 59.

Soient r le rayon de courbure de la trajectoire AB en A, et r_1 le rayon de courbure de la trajectoire A_1B_1 en A_1.

On a par définition :

$$AB = r d\tau \qquad \text{et} \qquad A_1B_1 - r_1 d\tau.$$

Mais, d'après la relation :

$$r = -\frac{v^2}{g \cos \tau},$$

on aura :

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{r}{r_1} = \frac{v^2}{v_1^2}.$$

ou bien, puisque d'après le théorème précédent

$$b_n v^n = b'_n v_1^n,$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \left(\frac{v}{v_1}\right)^2 = \left[\frac{b'_n}{b_n}\right]^{\frac{2}{n}}.$$

Ainsi les deux trajectoires sont composées d'éléments AB et A_1B_1 semblables et semblablement placés. Elles sont homothétiques et leur rapport de similitude est :

$$\left[\frac{b'_n}{b_n}\right]^{\frac{2}{n}}.$$

Les *vitesses* en deux points homologues sont dans un rapport constant, égal à la racine carrée du rapport de similitude.

Deux arcs homologues sont parcourus en des *temps* t et t_1 tels que :

$$\frac{t}{t_1} = \frac{s}{v} \cdot \frac{v_1}{s_1} = \frac{s}{s_1} \cdot \frac{v_1}{v} = \left(\frac{v}{v_1}\right)^2 \frac{v_1}{v} = \frac{v}{v_1}.$$

3° *Démonstration analytique.* — Au lieu d'employer la voie géométrique ci-dessus, la similitude des trajectoires Q = constante, peut s'établir immédiatement en considérant les formules du n° 164.

Les seconds membres, en effet, de ces équations seront égaux pour deux trajectoires : 1° si Q est constant ; 2° si les limites α et τ de l'arc sont les mêmes, c'est-à-dire si on considère deux arcs *homologues*.

En égalant alors les premiers membres des trajectoires b_n et b'_n, on trouve immédiatement le rapport de

similitude $\left[\frac{b'_n}{b_n}\right]^{\frac{2}{n}}$ pour les longueurs x et y et le rapport $\left[\frac{b'_n}{b_n}\right]^{\frac{1}{n}}$ pour les vitesses et les temps.

4° *Théorème III* (*Réciproque*). — Supposons deux trajectoires semblables et considérons deux petits arcs homologues inclinés de τ sur l'horizontale. Soit K le rapport donné de similitude des deux trajectoires.

Les deux valeurs des rayons de courbure en τ

$$r = -\frac{v^2}{g \cos\tau} \qquad \text{et} \qquad r_1 = -\frac{v_1^2}{g\cos\tau}$$

donneront :
$$\frac{r}{r_1} = \text{K} = \frac{v^2}{v_1^2}.$$

Si on prend alors les deux équations de l'hodographe sous leur forme générale :

$$g\,\frac{d(v\cos\tau)}{v d\tau} = c\text{F}(v) \qquad \text{et} \qquad g\,\frac{d(v_1\cos\tau)}{v_1 d\tau} = c_1\text{F}(v_1)$$

la relation $\frac{v}{v_1} = \sqrt{\text{K}}$ qui rend égaux les premiers membres exige que $c\text{F}(v) = c_1\text{F}(v_1)$.

5° Ceci posé, on peut démontrer le théorème suivant :

La similitude de deux trajectoires n'est possible que dans le cas où on admet que la résistance de l'air est proportionnelle à une puissance de la vitesse.

De la relation $v = v_1\sqrt{\text{K}}$, on tire en différentiant logarithmiquement

$$\frac{dv}{v} = \frac{dv_1}{v_1} = m,$$

m étant une constante.

De la relation $cF(v) = c_1F(v_1)$ on déduit, en opérant de même

$$\frac{dF(v)}{F(v)} = \frac{dF(v_1)}{F(v_1)} = m'.$$

On pourra donc écrire :

$$\frac{dF}{F} = m' = \left(\frac{m'}{m}\right) m = \frac{m'}{m}\,\frac{dv}{v}.$$

Posant : $\frac{m'}{m} = n$ et intégrant, on aura :

$$\text{Log } F = n \text{ Log } v + \text{Log } B_n,$$

B_n étant une constante ; on en déduit :

$$F(v) = B_n v^n \qquad \text{c. q. f. d.}$$

168. **Conséquences de la théorie de la similitude.** — Toutes les trajectoires de la famille Q = constante étant semblables, la table définie au n° 165 et qui donne une trajectoire calculée avec des valeurs particulières pour Q et b_n permet d'obtenir une trajectoire quelconque définie par la même valeur de Q, et par telle autre valeur qu'on voudra pour b_n. Il suffira, en effet, d'amplifier les éléments de celle qui a été calculée en suivant les règles de similitude démontrées ci-dessus.

Ainsi donc, le problème général qui, à l'origine, semblait dépendre de trois paramètres V_0, α et b_n a été ramené tout d'abord à ne dépendre que de deux, Q et b_n et enfin par la théorie de la similitude, que d'un seul Q. Le calcul des tables numériques se réduira donc, en dernière analyse, à celui d'un certain nombre de trajectoires distinguées par les valeurs attribuées au paramètre Q et

pour le calcul de toutes ces trajectoires, on adoptera une seule et même valeur pour b_n, valeur qu'on peut d'ailleurs choisir arbitrairement.

On voit que la quantité Q définit la forme de la trajectoire. On peut la nommer *paramètre de forme*.

La variable b_n, véritable *paramètre de grandeur*, en définit les dimensions.

Quant aux données initiales V_0, α et finales τ, ou x, t, y, elles ne sont que des constantes qui délimitent dans la trajectoire indéfinie de *forme* Q et de *grandeur* b_n la portion utile que l'on a à considérer.

On a vu, au nº 161, que le *paramètre de forme* Q pouvait recevoir diverses définitions résultant de l'application de l'équation de l'hodographe à différents points de cette courbe.

a) C'est ainsi qu'on a d'abord la définition générale

$$Q = \xi_n(\alpha) + \frac{g}{n b_n V_0^n \cos^n \alpha},$$

en tout point de l'hodographe.

b) Au sommet $\quad Q = \frac{g}{n b_n V_s^n} = \frac{1}{\gamma}.$

c) Au point Ω de vitesse infinie sur la branche ascendante $\quad Q = \xi_n(\Theta).$

d) Au point de vitesse minimum

$$Q = \xi_n(\tau_m) - \frac{1}{n \sin \tau_m \cos^n \tau_m},$$

Etc.

169. **Nombres inscrits dans les tables.** — D'après ce qui vient d'être dit, les tables définies au

n° 165 ne porteront plus que l'en-tête Q, ou un en-tête équivalent tel que γ, Θ, τ_m...

Le choix le plus simple qui pourra être fait de b_n pour calculer toutes ces tables sera celui qui rend les nombres inscrits dans les tables indépendants des unités de mesure. Si on remarque que les deuxièmes membres des équations du n° 164 sont des quantités purement numériques, on obtiendra immédiatement le résultat cherché en inscrivant ces nombres abstraits dans les tables dont les colonnes porteront alors comme en-tête les quantités qui figurent dans les premiers membres de ces équations.

Les tables prendront alors la disposition suivante :

Q =	ou γ =	ou Θ =		
τ	$\left[\frac{nb_n}{g}\right]^{\frac{2}{n}} gx$	$\left[\frac{nb_n}{g}\right]^{\frac{2}{n}} gy$	$\left[\frac{nb_n}{g}\right]^{\frac{1}{n}} gt$	$\frac{b_n v^n}{g}$

La disposition du reste de la table est analogue à celle du n° 165.

L'usage de ces tables sera le suivant :

Ayant déterminé le *paramètre de forme* Q par la relation connue en fonction des données initiales, V_0, b_n et α (168), prendre la table ayant pour en-tête cette valeur de Q. Former à partir de l'angle de projection α la trajectoire même que donne la table, comme il a été dit au n° 165, puis diviser respectivement chaque élé-

ment par les facteurs qui multiplient x, y, t ou v dans les en-têtes des colonnes. On aura ainsi, en grandeur, la trajectoire cherchée.

Tels sont les principes généraux qui ont présidé à la confection des différentes tables qui ont été calculées. En parlant, au paragraphe suivant, de ces tables, nous dirons les quelques différences que chaque auteur a introduites dans leurs dispositions et nous signalerons les variantes de ces tables.

170. La branche ascendante des trajectoires d'Euler. — La forme des trajectoires d'Euler $[cF(v) = b_n v^n]$ est celle qui a été étudiée au Chapitre V. Il existe, pour chaque valeur de Q ou Θ une trajectoire avec sommet (Q ou Θ positif) et une trajectoire sans sommet (Q ou Θ négatif) qui se complètent mutuellement.

La *vitesse terminale* v' est la même pour ces deux trajectoires et telle que $b_n v'^n = g$.

Il existe pour chacune une asymptote verticale à distance finie.

Suivant la valeur de l'exposant n, l'extrémité ($-\Omega$ et $-\Omega'$) de la branche ascendante aura des propriétés différentes. On a donné (121) l'expression, dans le cas de $cF(v) = b_n v^n$, des quatre fonctions dont dépendent les propriétés des points Ω et Ω'.

On a :

$$J(v) = \frac{g}{n b_n v^n}; \qquad D(v) = \frac{1}{(n-2) b_n v^{n-2}};$$

$$S(v) = \frac{1}{(n-1) b_n v^{n-1}}; \quad A(v) = \frac{g}{n(2n-2) b_n^2 v^{2n-2}}.$$

Il faudra faire $v = \infty$ dans ces expressions. Pour les valeurs de $n > 0$ (résistance croissant avec la vitesse), on trouve alors :

n	< 1	$= 1$	< 2	$= 2$	> 2
Les points Ω et Ω' sont à distance.	∞	∞	∞	∞	finie
Le temps T est.	∞	∞	fini	fini	fini
L'asymptote est à distance.	∞	∞	finie	finie	finie

§ 3. — Les tables d'Otto (résistance quadratique)

171. **Cas de n = 2.** — Le cas d'une résistance quadratique est, au point de vue pratique, le plus important de ceux compris dans la théorie d'Euler. C'est d'ailleurs pour ce problème particulier, sur lequel se sont portés ensuite les efforts de nombreux géomètres, qu'Euler développa sa théorie ; il calcula lui-même, à titre d'exemple numérique, une des trajectoires de la famille Q = const.

La même méthode fut appliquée à la construction de tables suffisamment étendues, en 1704, par Græwenitz. Plus tard, en 1840, le Gal Otto reprit la même question.

Les tables de Græwenitz affectent exactement la disposition indiquée au n° 165. Le paramètre de forme choisi, est, à l'exemple d'Euler, l'inclinaison limite Θ de la branche ascendante.

Les tables d'Otto présentent une disposition différente, quoique le point de départ en ait été le calcul de

tables absolument analogues à celles de Græwenitz et avec le même argument Θ. Sous la forme que leur a donnée le G[al] Otto, elles sont d'un usage très pratique et ce sont celles-là même, après quelques modifications de détail, qu'on peut encore employer actuellement pour l'établissement des tables du tir des mortiers.

172. Intégrale de l'arc s dans le cas de n = 2. — Le calcul des intégrales du n° 164 qui, dans le cas général, ne peut se faire que par des méthodes générales de quadrature, peut, dans le cas d'une résistance quadratique, s'effectuer par un procédé d'approximation spéciale et rapide, qui tient à ce qu'une intégrale, reliée facilement à celles du n° 164, peut s'intégrer immédiatement. Cette intégrale est celle qui donne l'arc s de trajectoire.

On a en effet $ds = vdt = -\dfrac{v^2}{g}\dfrac{d\tau}{\cos\tau}$ d'où, dans le cas général,

$$\left[\frac{nb_n}{g}\right]^{\frac{2}{n}} gs = -\int_\alpha^\tau [Q - \xi_n(\tau)]^{-\frac{2}{n}} \frac{d\tau}{\cos^3\tau}.$$

Si on y fait $n = 2$, il vient

$$2b_2 s = -\int_\alpha^\tau \frac{\dfrac{d\tau}{\cos^3\tau}}{Q - \xi_2(\tau)}.$$

Or on a
$$d\xi_2(\tau) = \frac{d\tau}{\cos^3\tau}.$$

Donc

$$2b_2 s = -\int_\alpha^\tau \frac{d\xi_2(\tau)}{Q - \xi_2(\tau)} = \text{Log}\,\frac{Q - \xi_2(\tau)}{Q - \xi_2(\alpha)}.$$

Remplaçant Q par sa valeur $Q = \xi_2(\alpha) + \frac{g}{2b_2u_0^2}$, il viendra :

$$s = \frac{1}{2b_2} \operatorname{Log}\left[1 + \frac{2b_2}{g} u_0^2(\xi_2(\alpha) - \xi_2(\tau))\right].$$

L'arc s est donc connu.

173. **Calcul des éléments d'un arc.** — Pour calculer une trajectoire Q, Euler et après lui Otto, font le calcul par arcs successifs (qu'ils choisissent de faible amplitude) en prenant comme point de départ l'intégrale précédente qui donne s. Les formules qu'ils emploient sont les suivantes :

Soit un arc dont on connaît les tangentes extrêmes τ_0 et τ et la vitesse v_0 à l'origine. Les inconnues sont, au point τ, les quantités v, x, y et t.

a) *Calcul de v.* — La vitesse v sera donnée immédiatement par l'intégrale de l'hodographe

$$\frac{g}{2b_2v^2\cos^2\tau} = \frac{g}{2b_2v_0^2\cos^2\tau_0} + \xi_2(\tau_0) - \xi_2(\tau)$$

L'intégrale $\xi_2(\tau_0) - \xi_2(\tau)$ est prise par une simple différence dans la table de la fonction $\xi_2(\tau)$. Tout est alors connu dans le second membre ; v est donc connu.

b) *Calcul de s.* — La formule du n° 172

$$s = \frac{1}{2b_2} \operatorname{Log}\left[1 + \frac{2b_2}{g} v_0^2\cos^2\tau_0 \left(\xi_2(\tau_0) - \xi_2(\tau)\right)\right]$$

peut encore s'écrire :

$$s = \frac{1}{2b_2} \operatorname{Log} \frac{v_0^2\cos^2\tau_0}{v^2\cos^2\tau}.$$

Dans le second membre tout est connu : l'arc s est donc connu.

c) *Calcul de x et y.* — Procédant alors par approximation dans l'hypothèse d'une amplitude $(\tau_0 - \tau)$ petite, Euler et Otto posent :

$$x = s \cos \frac{\tau_0 + \tau}{2} \qquad y = s \sin \frac{\tau_0 + \tau}{2}.$$

On remplace donc l'arc s par une droite de même longueur inclinée de l'angle moyen $\frac{\tau_0 + \tau}{2}$.

d) *Calcul de t.* — Admettant que l'arc s est parcouru avec une vitesse moyenne $\frac{v_0 + v}{2}$, on écrira

$$t = \frac{2s}{v_0 + v}.$$

174. **Tables de première espèce**. — Otto calcule la trajectoire par arcs successifs de 1°, en partant du sommet sur la branche ascendante et sur la branche descendante.

Chacune des trajectoires, calculée et définie par une certaine valeur du *paramètre de forme* Θ, est disposée comme la table du n° 165, mais les en-têtes deviennent en faisant $n = 2$

$\Theta =$				
τ	$2b_2x$	$2b_2y$	$t\sqrt{2b_2g}$	$\frac{b_2}{g}v^2$

175. Première transformation. — Mais dans la pratique, on a besoin le plus souvent, non de la trajectoire totale du projectile que donnent les tables de première espèce, mais des éléments du point de chute en fonction des données initiales V_0, α et b_2. Le problème résolu et résumé numériquement par les tables précédentes était beaucoup plus général que le problème restreint ainsi posé. Mais inversement, cette solution générale étant acquise, il est facile d'en déduire les éléments dont on a besoin dans les cas ordinaires et d'en former un ensemble tout à fait pratique.

Chacune des m tables de première espèce, correspondant à m valeurs de Θ renfermera, en regard de l'argument τ, les valeurs des quatre éléments x, y, t et v. Remplaçons tout d'abord ces m tables par quatre tables particulières à *double entrée* ne donnant chacune qu'un des éléments x, y, t ou v et se présentant sous forme de table de Pythagore avec deux arguments Θ et τ ainsi qu'il suit

$2b_2x$										
$\Theta \backslash \tau$	75	74		1	0	−1	...	−80	−81	...
85										
...										
50										
...										
25										
...										
0										

Mais au lieu de mettre dans cette table les valeurs de $2b_2x$, qui représentent les abscisses depuis $\tau = 75°$ par exemple jusqu'à $\tau = 0$, on peut mettre $2b_2X$, X étant la portée depuis l'origine jusqu'au point de chute. A cet effet, on déterminera le point de chute dans la table $2b_2y$ en cherchant l'angle négatif fournissant la même ordonnée y que celle inscrite dans la colonne 75°, et pour la valeur Θ choisie.

La table $2b_2X$ s'arrêtera donc au sommet $\tau = 0$ et aura deux arguments α et Θ.

On dressera des tables analogues pour les autres éléments du point de chute qui, avec les mêmes arguments α et Θ donneront ω ; $T\sqrt{2b_2g}$; $V_\omega \sqrt{\frac{b_2}{g}}$.

On pourra, de la même manière, établir, si on veut, des tables du même genre pour les éléments du sommet qui donneront

$$2b_2Y_s ; \qquad 2b_2X_s ; \qquad T_s\sqrt{2b_2g} ; \qquad V_s\sqrt{\frac{b_2}{g}}.$$

176. **Deuxième transformation**. — Mais l'argument qui se présente naturellement dans les applications pratiques et en particulier dans le problème du calcul numérique d'une table de tir est l'angle de projection α et il est utile d'avoir à la fois tous les éléments qui correspondent à cet angle, au lieu de les trouver répartis en un grand nombre de tables.

On obtiendra ce résultat en réunissant, dans un tableau portant comme titre une valeur de α, chacune des colonnes des tables précédentes qui portent l'en-tête α.

Cette nouvelle table aura, comme la précédente, Θ pour argument, et elle comprendra autant de colonnes

qu'il y a d'éléments de la trajectoire dont on veut connaître la valeur.

La disposition de cette table sera la suivante :

$\alpha =$					
Θ	$2b_2X$	$2b_2Y_s$	$T\sqrt{2b_2g}$	ω	$V_\omega\sqrt{\frac{b_2}{g}}$

177. Disposition des tables d'Otto primitives. — Telle était, à l'exception de la dernière colonne, la disposition donnée par Otto aux tables qu'il a publiées (1840).

Mais une difficulté se présentait dans l'application : à l'époque où le G[al] Otto calculait ses tables balistiques, on ne savait pas déterminer couramment la vitesse initiale des projectiles. Cette vitesse, qui maintenant sert de point de départ aux calculs balistiques et est un élément que l'on connaît avec une approximation comparable à celle de la portée, ne pouvait donc être employée dans les calculs *a priori*, et devait être considérée comme une inconnue du problème. Il était par suite impossible de calculer, par exemple, la valeur de Θ (qui dépend de V_0 et de b_2), c'est-à-dire de reconnaître à quelle trajectoire on avait affaire, car b_2 était aussi inconnu *a priori*.

Il fallait, par suite, deux données expérimentales pour calculer les valeurs de b_2 et de Θ d'une trajectoire déterminée. La seconde donnée expérimentale à adjoindre à la portée X est la durée du trajet T et Otto a

ajouté à ses tables une colonne supplémentaire donnant le rapport $\frac{\sqrt{2b_2X}}{T\sqrt{2b_2g}} = \frac{\sqrt{X}}{T\sqrt{g}}$ qui est indépendant de b_2.

Par une seule expérience faisant connaître X et T, c'est-à-dire le rapport précédent, on pouvait donc déterminer b_2 par la deuxième colonne $2b_2X$ et Θ par la première. V_0 se déterminait alors par l'équation de l'hodographe.

178. **Modifications de Siacci.** — A l'heure actuelle V_0 et b_2 sont connus expérimentalement avec précision et sont devenus les véritables données pour l'établissement des tables de tir. Mais le calcul de Θ par l'équation de l'hodographe

$$\xi_2(\Theta) = \xi_2(\alpha) + \frac{g}{2b_2V_0^2\cos^2\alpha}$$

exige l'emploi de tables auxiliaires de la fonction $\xi_2(\tau)$. Pour éviter cette sujétion, on change l'argument des tables d'Otto, en remarquant que pour une table déterminée, d'en-tête α, la valeur de $\xi_2(\Theta)$ ne dépend que du *paramètre* $\frac{b_2V_0^2}{g}$. C'est ce paramètre qui remplacera Θ. D'autre part, on peut changer l'ordre des colonnes et prendre pour première $2b_2X$, qui variera alors en progression arithmétique.

Enfin, on peut généraliser l'emploi des rapports des quantités entre elles, de manière à éliminer b_2 de toutes les colonnes moins deux.

Siacci, qui a adopté ces modifications et dont les

tables[1] sont très employées, les met donc sous la forme :

$\alpha =$						
$2b_2X$	$\frac{b_2V_0^2}{g}$	$\frac{V_0^2}{2gX}$	ω	$\frac{V_\omega}{V_0}$	$\frac{T\sqrt{g}}{\sqrt{X}}$	$\frac{Y_s}{X}$

La colonne $\frac{V_0^2}{2gX}$ joue le même rôle que celle $\frac{T\sqrt{g}}{\sqrt{X}}$ d'Otto. Elle permet, d'après l'observation de la portée seule, de déterminer le coefficient b_2, connaissant, par hypothèse, la vitesse initiale V_0.

179. Sur le calcul des éléments x, y, t de l'arc s. — On a vu que, pour déduire les éléments x, y, t de l'extrémité τ de l'arc s, dont la longueur est connue exactement (172), Euler et Otto employaient une méthode d'approximation très simple posant

$$x = s \cos \frac{\tau_0 + \tau}{2}; \quad y = s \sin \frac{\tau_0 + \tau}{2}; \quad t = \frac{2s}{v_0 + v}.$$

Mais le degré d'exactitude d'un tel procédé est inconnu et variable avec les conditions de la trajectoire étudiée ; pour l'employer avec sûreté, on est donc obligé de réduire à l'extrême l'amplitude $(\tau_0 - \tau)$ de l'arc considéré. Aussi les balisticiens ont-ils souvent proposé de substituer à ces formules simples quelques autres plus précises.

[1] Les tables publiées par Siacci pour une résistance quadratique sont, pour une partie, déduites des tables d'Otto. Leur prolongement, pour les fortes valeurs de $2b_2X$, a été calculé par Siacci dans l'hypothèse du *tir de plein fouet*. Cette seconde partie ne présente donc pas le même caractère de généralité que la première, à l'emploi de laquelle il faut se borner pour l'établissement des tables de tir des mortiers.

a) *Legendre* substitue à la trajectoire son cercle osculateur, c'est-à-dire une circonférence ayant mêmes tangentes aux extrémités τ_0 et τ de l'arc. Il établit alors facilement les formules

$$x = 2s\,\frac{\sin\frac{\tau_0-\tau}{2}}{\tau_0-\tau}\cos\frac{\tau_0+\tau}{2}\,;\quad y = 2s\,\frac{\sin\frac{\tau_0-\tau}{2}}{\tau_0-\tau}\sin\frac{\tau_0+\tau}{2}$$

qui, $(\tau_0 - \tau)$ étant un petit arc, se réduisent à :

$$x = s\left[1 - \frac{(\tau_0-\tau)^2}{1.2.3.4}\right]\cos\frac{\tau_0+\tau}{2}$$

$$y = s\left[1 - \frac{(\tau_0-\tau)^2}{1.2.3.4}\right]\sin\frac{\tau_0+\tau}{2}.$$

b) *Didion*, adopte pour évaluer les rapports $\frac{x}{s}$ et $\frac{y}{s}$, les valeurs que ces rapports auraient dans le vide, pour la parabole de la vitesse, osculatrice à l'arc. D'après les formules données au n° 18 pour la longueur de l'arc s de trajectoire dans le vide, et pour l'expression de x et de y, on trouve

$$x = s\,\frac{\operatorname{tg}\tau_0 - \operatorname{tg}\tau}{\xi_2(\tau_0) - \xi_2(\tau)}\,;\qquad y = x\,\frac{\operatorname{tg}\tau_0 + \operatorname{tg}\tau}{2}.$$

Dans le cas d'un arc $(\tau_0 - \tau)$ petit ces formules, réduites à leurs deux premiers termes, coïncident avec celles de Legendre.

180. **Formules exactes pour le calcul des éléments x, y, t de l'arc s.** — Les trois formules données ci-dessus, — Euler, Legendre et Didion — présentent toutes le même défaut, c'est de faire appel uniquement à des considérations géométriques, de sorte qu'elles restent les mêmes quelle que soit la trajectoire, et quelle que soit la résistance de l'air. Ainsi la formule de Didion pourra s'appliquer légitimement si la résistance de l'air est très petite, parce que la trajectoire atmosphérique sera très voisine de celle du vide ; mais son approximation cessera d'être légitime si la résis-

tance de l'air devient considérable, écartant beaucoup la trajectoire réelle de la parabole de la vitesse.

Les formules exactes s'établiront, dans l'hypothèse où $(\tau_0 - \tau)$ est petit, par le développement en série de Mac-Laurin des éléments de la trajectoire relativement à l'arc s (139). L'emploi de ces séries sera tout à fait légitime et leur convergence rapide dans le cas actuel où $(\tau_0 - \tau)$ est supposé un petit arc.

Dans le cas général d'une résistance cF quelconque on aura les dérivées successives suivantes :

$$\frac{dx}{ds} = \cos\tau \qquad \frac{dy}{ds} = \sin\tau$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{g}{u^2}\sin\tau\cos^3\tau \qquad \frac{d^2y}{ds^2} = -\frac{g}{u^2}\cos^4\tau$$

$$\frac{d^3x}{ds^3} = \frac{g^2}{u^4}\cos^5\tau\left[4\sin^2\tau + 2\frac{cF}{g}\sin\tau - 1\right] \qquad \frac{d^3y}{ds^3} = -\frac{2g^2}{u^4}\cos^6\tau\left[2\sin\tau + \frac{cF}{g}\right]$$

On a en outre :

$$\frac{dt}{ds} = \frac{\cos\tau}{u}; \qquad \frac{d^2t}{ds^2} = g\,\frac{\cos^3\tau}{u^3}\left[\frac{cF}{g} + \sin\tau\right]$$

On aura ainsi les formules :

$$x = s\cos\tau_0 + \frac{s^2}{1.2}\frac{g}{V_0^2}\sin\tau_0\cos\tau_0 + \frac{s^3}{1.2.3}\frac{g^2}{V_0^4}\cos\tau_0\left[4\sin^2\tau_0 + 2\frac{cF_0}{g}\sin\tau_0 - 1\right]\ldots$$

$$y = s\sin\tau_0 - \frac{s^2}{1.2}\frac{g}{V_0^2}\cos^2\tau_0 - \frac{s^3}{1.2.3}\frac{g^2}{V_0^4}\cos^2\tau_0\left[4\sin\tau_0 + 2\frac{cF_0}{g}\right]\ldots$$

$$t = \frac{s}{V_0} + \frac{s^2}{1.2}\frac{g}{V_0^3}\left[\sin\tau_0 + \frac{cF_0}{g}\right]\ldots$$

Si on fait $cF_0 = 0$, on obtient les développements dans le vide de $\frac{x}{s}$, $\frac{y}{s}$ et $\frac{t}{s}$. On écrira donc

$$x = s\frac{\operatorname{tg}\tau_0 - \operatorname{tg}\tau}{\xi_2(\tau_0) - \xi_2(\tau)} + \frac{s^3}{3}\frac{\sin\tau_0\cos\tau_0}{V_0^4}gcF_0 + \cdots$$

$$y = \frac{s}{2}\frac{\operatorname{tg}^2\tau_0 - \operatorname{tg}^2\tau}{\xi_2(\tau_0) - \xi_2(\tau)} - \frac{s^3}{3}\frac{\cos^2\tau_0}{V_0^4}gcF_0 + \cdots$$

$$t = \frac{s}{V_0}\left[1 + \frac{s}{2}\frac{g}{V_0^2}\left(\sin\tau_0 + \frac{cF_0}{g}\right) + \cdots\right]$$

Les deux premières formules introduisent les fonctions de Didion, mais avec l'adjonction d'un terme correctif tenant compte de la valeur de la résistance de l'air.

§ 4. — Tables de Bashforth (résistance cubique) et de Zabouski (résistance biquadratique)

181. **Tables de Bashforth (résistance cubique).** — Les tables de Bashforth qui supposent une résistance cubique $F(v) = B_3 v^3$ sont établies, à peu de chose près, comme les tables que nous avons dénommées « tables de première espèce » (169-174).

1° Comme *paramètre de forme*, Bashforth a choisi celui qui dépend du sommet de la trajectoire. On a (168) :

$$Q = \frac{1}{nb_n V_s^n} = \frac{1}{\gamma}$$

Basforth pose :

$$\gamma_1 = \frac{b_3 V_s^3}{g}.$$

On a donc :

$\gamma_1 = \frac{1}{3}\gamma$ et γ_1 est le paramètre de forme de Bashforth.

Étant données les conditions initiales du tir, α, V_0, b_3, on obtiendra γ_1 c'est-à-dire on saura quelle table il y a lieu d'employer, en utilisant l'équation de l'hodographe qui, dans ce cas, s'écrira :

$$\frac{1}{\gamma_1} = 3\xi_3(\alpha) + \frac{g}{b_3 V_0^3 \cos^3 \alpha}$$

ou bien, en vertu de l'expression établie au n° 159 pour la fonction $\xi_3(\tau)$:

$$\frac{1}{\gamma_1} = \frac{g}{b_3 V_0^3 \cos^3 \alpha} + 3 \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}^3 \alpha.$$

2° Comme *paramètre de grandeur*, au lieu de la quantité b_3 analogue à b_2 des tables d'Otto, Bashforth a choisi la vitesse au sommet V_s de la manière suivante.

Dans le cas de $n = 3$, les en-têtes des tables de première espèce (160) peuvent s'écrire :

$$g\left[\frac{3b_3}{g}\right]^{\frac{2}{3}} x\,; \quad g\left[\frac{3b_3}{g}\right]^{\frac{2}{3}} y\,; \quad g\left[\frac{3b_3}{g}\right]^{\frac{1}{3}} t\,; \quad \left[\frac{b_3}{g}\right]^{\frac{1}{3}} v$$

qui deviennent, en utilisant la relation $\dfrac{b_3}{g} = \dfrac{\gamma_1}{V_s^3}$:

$$g\,\frac{[3\gamma_1]^{\frac{2}{3}}}{V_s^2}\, x\,; \quad g\,\frac{[3\gamma_1]^{\frac{2}{3}}}{V_s^2}\, y\,; \quad g\,\frac{[3\gamma_1]^{\frac{1}{3}}}{V_s}\, t\,; \quad \frac{\gamma_1^{\frac{1}{3}}}{V_s}\, v$$

Mais comme, dans chaque table, γ_1 est un nombre constant, Bashforth a multiplié les nombres des colonnes correspondantes par les facteurs constants des numérateurs, de sorte que les en-têtes se trouvent réduits à :

$$\frac{gx}{V_s^2}\,; \quad \frac{gy}{V_s^2}\,; \quad \frac{gt}{V_s}\,; \quad \frac{v}{V_s}$$

L'emploi de ces tables sera le même que celui des tables d'Otto, tel qu'il est indiqué au n° 177.

3° Le calcul numérique de ces tables n'offrait pas à Bashforth la même simplicité que le calcul des tables d'Otto, car, dans l'hypothèse d'une résistance cubique, aucune des équations du mouvement n'est intégrable, d'une manière simple tout au moins, comme celle qui donne l'arc s dans le cas de $n = 2$. Si le calcul de ces tables devait être refait actuellement, on pourrait sans doute utiliser la solution de Greenhill par les fonctions elliptiques (Chap. VIII) pour abréger les calculs numériques. Bashforth a fait les calculs directement en évaluant chacune des intégrales, sur un petit arc, par les méthodes ordinaires d'intégration approchée [1].

182. **Tables de Zabouski (résistance biquadratique)** [2]. — Ces tables sont analogues comme dispositions générales aux tables d'Otto modifiées par Siacci; elles se rapportent au cas d'une résistance biquadratique $F(v) = B_4 v^4$.

Elles sont déduites de « tables de première espèce » calculées par un procédé d'approximation spécial des intégrales du mouvement (211, exercices).

Posant : $$b_4 = \frac{g}{K^4},$$

M. Zabouski donne comme en-têtes des tables de première espèce :

$$\frac{2gx}{K^2}; \qquad \frac{2gy}{K^2}; \qquad \frac{g}{K}\sqrt{4t}; \qquad \frac{v}{K}$$

[1] Voir Mémorial de l'Artillerie de la Marine, t. II, 1874, p. 757.
[2] *Revue d'Artillerie*, t. XXXIV, 1889, p. 427.

ou par la multiplication des facteurs numériques constants :

$$\frac{gx}{K^2}; \qquad \frac{gy}{K^2}; \qquad \frac{gt}{K}; \qquad \frac{v}{K}.$$

La table définitive porte alors les en-têtes suivantes correspondant à une valeur α de l'angle de projection.

$\alpha =$							
$\frac{V_0}{K}$	$\frac{gX}{K^2}$	$\frac{gX}{V_0^2}$	ω	$\frac{gY_s}{K^2}$	$\frac{V_\omega}{V_0}$	$\frac{gT}{K}$	$\frac{v_m}{V_0}$

La dernière colonne $\frac{v_m}{V_0}$ renferme le rapport de la *vitesse minimum* v_m sur la branche descendante à la vitesse initiale V_0. Ce rapport sert à M. Zabouski pour l'application de ses tables à des calculs de trajectoires par arcs successifs.

§ 5. — Calcul des trajectoires par arcs

183. **Problème à résoudre**. — La loi de résistance de l'air $F(v)$ se présente, comme on sait (13), sous une forme en général irréductible à $B_n v^n$.

Par suite, ce ne sera que dans des cas fort rares, tels que celui du tir des mortiers à faible vitesse, qu'on pourra appliquer au problème balistique la méthode d'Euler et faire usage des tables basées sur cette méthode qui ont été examinées dans les paragraphes précédents.

Mais il sera cependant toujours possible, moyennant,

il est vrai, des calculs longs et pénibles, d'obtenir par points telle trajectoire qu'on voudra, définie par les éléments à l'origine c, Y_0, α et par une loi donnée de résistance de l'air, quelque compliquée qu'on la suppose. Ce procédé ne sera d'ailleurs que l'évaluation par approximation des intégrales des équations différentielles du mouvement.

Parmi les nombreux procédés qu'il est possible d'imaginer pour ce calcul, il en existe un particulièrement employé qui utilise la théorie d'Euler et qui fera l'objet du présent paragraphe.

184. **Méthodes directes.** — 1° Mais, étant données seulement les équations différentielles du mouvement et sans avoir aucune connaissance préalable d'une solution du problème balistique, il est possible de calculer élément par élément une trajectoire complète.

On commencera par l'intégration numérique de l'équation de l'hodographe qu'on écrira :

$$\Delta v = \left[\frac{cvF}{g\cos\tau} + v\,\mathrm{tg}\,\tau\right]\Delta\tau \quad .$$

On donnera à $\Delta\tau$ des valeurs constantes et très petites, 10′ par exemple et, pour calculer Δv, on remplacera les termes entre crochets par leurs valeurs à l'origine de l'arc ou leurs valeurs moyennes après une première approximation. Pour l'arc suivant, les données initiales seront $(\tau - 10')$ et $(v - \Delta v)$ ce qui déterminera une nouvelle valeur du crochet et la valeur Δv correspondant à $(\tau - 20')$, etc.

On pourra donc dresser un tableau renfermant, en

regard des inclinaisons τ décroissant à partir de α, les vitesses v correspondantes.

Les autres intégrales du mouvement s'obtiendront aisément par les calculs successifs de :

$$\Delta t = -\frac{v}{g}\frac{1}{\cos\tau}\Delta\tau; \quad \Delta x = -\frac{v^2}{g}\Delta\tau; \quad \Delta y = -\frac{v^2}{g}\operatorname{tg}\tau\,\Delta\tau$$

où les valeurs de v et de τ recevront successivement les valeurs corrélatives du premier tableau.

Cette méthode exigera évidemment une division de la trajectoire en arcs très serrés.

2° L'intégration de l'hodographe, soit par le procédé indiqué ci-dessus, soit par tout autre, ayant permis de dresser le tableau des valeurs corrélatives de v et de τ, on peut appliquer à la quadrature des t, x et y une des méthodes générales d'évaluation numérique des intégrales telles que celle de Simpson, ou celle plus rapide de Gauss et de Tchebicheff. C'est à ce dernier mode d'évaluation des intégrales t, x et y que le L[t]-colonel Vallier a donné le nom de *méthode des vitesses* [1].

3° On obtiendra un procédé plus rapide que le précédent, c'est-à-dire exigeant une division de la trajectoire en arcs moins nombreux, en utilisant les développements en série de Mac-Laurin qui ont été donnés au Chapitre VI, § 3.

On prendra d'ailleurs tel argument qu'on voudra, x, τ, u...

Comme ces développements en série représentent

[1] *Balistique expérimentale*, p. 49, par le L[t]-colonel Vallier.

déjà, relativement aux équations différentielles, des intégrales du mouvement, qui au lieu de prendre en considération comme dans la méthode précédente seulement la valeur F_0 à l'origine de l'arc, font intervenir des dérivées successives F'_0, F''_0, ce deuxième procédé sera bien préférable.

185. **Première méthode fondée sur la théorie d'Euler**. — Le principe du calcul de la trajectoire par arcs en employant la théorie d'Euler, est fort simple : partager la courbe qui représente la résistance de l'air en éléments d'étendue assez petite pour que, dans l'intervalle des vitesses aux extrémités d'un arc convenablement choisi, on ne commette pas d'erreur sensible en considérant la résistance comme proportionnelle à une certaine puissance n de la vitesse.

On divisera la trajectoire en arcs assez petits, définis par leurs inclinaisons initiale τ_0 et finale τ de manière à ce que la variation des vitesses de v_0 à v soit faible.

D'ailleurs, qu'on emploie la loi de la 1re, de la 2e, de la 3e puissance, etc., le résultat sera le même et aussi exact dans un cas que dans l'autre, en s'astreignant à un choix convenable de l'arc, dont l'amplitude pourra d'ailleurs varier avec l'exposant choisi. L'exactitude de ces méthodes est donc théoriquement illimitée.

Ceci posé, chaque arc pourra se calculer soit en répétant pour cet arc où la résistance varie suivant la puissance n de la vitesse, les calculs qui ont servi à l'établissement des tables du présent Chapitre, soit en utilisant ces tables elles-mêmes.

Ainsi, si on considère la *loi du cube*, on pourra uti-

liser les tables de Bashforth (181), qui ont été d'ailleurs calculées en vue de la décomposition en arcs d'une trajectoire quelconque : on doit utiliser les tables dites de « première espèce ».

Soient donc (v_0, τ_0) les données à l'origine de l'arc, et $B_3 = \frac{F(v)}{v^3}$; le coefficient B_3 de la loi du cube sera pris dans une table numérique analogue à celle qui a été définie (11) et qui donnera $\frac{F(v)}{v^3}$. Le coefficient B_3 est supposé constant dans l'intervalle v_0 à v_1 et on a $cB_3 = b_3$.

Les trois quantités v_0, τ_0, b_3 permettent (181) de déterminer le *paramètre de forme* γ_1, des tables de Bashforth. On lira dans la table qui porte γ_1 comme en-tête des nombres proportionnels aux éléments et la fin de l'arc.

Le *paramètre de grandeur* qui est la vitesse au sommet V_s sera déterminé par l'équation

$$V_s^3 = \gamma_1 \frac{g}{b_3}.$$

On passera ensuite à l'arc suivant dont les données à l'origine seront τ_1, la vitesse v_1 qu'on vient de calculer et $b'_3 = cB'_3$, B'_3 étant le nouveau coefficient de la résistance de l'air qui convient maintenant pour le nouvel arc et qu'on prendra dans la table de la fonction $\frac{F(v)}{v^3}$.

On pourrait d'ailleurs sur une même trajectoire et suivant les régions de la courbe $F(v)$, utiliser tantôt $n = 1$, ou $n = 2$, 3 ou 4 à condition d'avoir des tables de première espèce pour chacun de ces exposants.

186. **Méthode de Gâvre**. — Dans la méthode de calcul des trajectoires par arcs employée à la Commission de Gâvre, on adopte comme loi de résistance la *loi quadratique*, mais on répète pour chaque arc les calculs qui ont servi au Gal Otto à la construction de ses tables.

Le coefficient B_2 que l'on suppose constant sur chaque arc est donc égal à $f(v)$ du n° 11.

Les calculs sont rendus simples et rapides grâce à la possibilité d'intégrer l'arc s par une équation qui introduit la fonction $\xi_2(\tau)$. Ils sont conformes à ceux donnés aux nos 172 et 173.

Le choix de la division en arcs doit satisfaire à deux conditions : l'une qui tient au principe même de la méthode exige que l'*intervalle des vitesses* du commencement à la fin de chaque arc soit assez faible pour qu'on puisse, sans erreur sensible, remplacer la variable $f(v)$ par une constante. L'autre tient au procédé particulier admis pour effectuer les calculs et qui est basé (la valeur de s étant connue par une intégration rigoureuse) sur la substitution d'une droite à l'arc de courbe dans l'évaluation de x et y ; il faut donc que l'*amplitude de l'arc* ne soit pas trop considérable (180).

187. **Considérations générales**. — Les méthodes précédentes permettant de calculer telle trajectoire qu'on voudra, on pourrait imaginer tous les éléments utiles de toutes les trajectoires possibles réunis sous forme de tables ayant naturellement trois arguments c, V_0 et α. La solution *numérique* du problème balistique serait complète et présenterait l'exactitude maximum compatible avec nos connaissances sur la loi de résistance de l'air.

Ce recueil numérique qui embrasserait ainsi toutes

les tables de tir de tous les canons et qui permettrait de les obtenir par de simples interpolations, aurait naturellement une étendue très considérable et exigerait un travail de calculs énorme, car déjà le calcul d'une seule trajectoire est long et laborieux et le nombre des trajectoires à calculer, pour s'étendre jusqu'aux limites entre lesquelles se meuvent en pratique les variables c, V_0 et α serait fort élevé.

Mais faisons abstraction des difficultés matérielles et admettons que de telles tables aient été calculées (et il y a eu effectivement des tentatives dans ce sens[1]). Pourrait-on réellement les considérer comme une solution du problème balistique ?

Tout d'abord, dépendant exclusivement d'une certaine loi de résistance de l'air, cette solution numérique mériterait les mêmes critiques qu'on peut adresser à la loi choisie : n'être pas démontrée rigoureusement, être en quelques points douteuse au point de vue expérimental et n'avoir enfin aucune généralité puisqu'elle ne s'applique qu'à des projectiles d'une forme particulière d'une certaine Artillerie. Aucune méthode générale, aucune connaissance réelle des lois du mouvement ne ressortiraient de ces tables qui seraient analogues à un recueil de nombres bruts, résultant de calculs expérimentaux, nombres qu'on aurait classés par ordre de grandeur et régularisés, mais qu'aucun autre lien ne paraîtrait réunir.

C'est une véritable obsession pour l'esprit de savoir que des nombres qu'on voit se dérouler indéfiniment

[1] Voir « Historique de la Balistique Extérieure à la Commission de Gâvre » par le Ct P. Charbonnier. *Revue Maritime*. 1906.

dans une table ont entre eux des relations certaines et mathématiques et de ne pas savoir quelles sont ces relations. On veut connaître les lois qui gouvernent ces nombres et quand la connaissance exacte et entière en paraît impossible, les efforts se portent vers une solution approchée qui peut déjà jeter quelque lumière sur leur enchaînement.

Ce besoin de théories explique pourquoi la solution pourtant rigoureuse d'Euler, mais qui se présente sous forme d'une table numérique a, de tout temps, paru insuffisante et pourquoi de si nombreuses tentatives ont été faites par des géomètres comme Borda, Legendre, Français, Bezout, Greenhill et en dernier lieu M. de Sparre pour ramener à des fonctions connues l'expression des différents éléments d'une trajectoire dans le cas spécial d'une résistance proportionnelle à une puissance de la vitesse.

L'emploi si laborieux du calcul des trajectoires par arcs successifs et la solution numérique aussi approchée qu'on veut, qu'il est possible d'obtenir par ce calcul, doivent donc être réservés à deux cas :

Le *premier* est celui où la théorie se déclarerait impuissante pour résoudre un problème qui sortirait des limites où elle est légitimement applicable.

Le *second* est celui où le calcul par arcs, grâce à sa précision et à l'absence de toute hypothèse peut servir à vérifier l'exactitude pratique d'une théorie où certaines simplifications ont été faites dans l'énoncé général du problème et dont on fera l'application numérique en employant la même loi de résistance que dans le calcul par arcs.

CHAPITRE VIII

RÉSISTANCE MONÔME. — LES CAS INTÉGRABLES

§ I — Résistance constante

188. **Objet de cette étude.** — Bien que, à proprement parler, le cas d'une résistance de l'air constante, indépendante par suite de la vitesse, ne paraisse pas rentrer immédiatement dans le problème du mouvement dans l'air des projectiles, il est intéressant cependant de le traiter ici. Ce cas peut, en effet, tout d'abord, être considéré comme un cas-limite du problème balistique et sa solution est particulièrement propre à éclairer certains points délicats des théories générales sur les propriétés des trajectoires atmosphériques.

En outre, ce problème répond à une réalité physique : c'est l'étude du mouvement d'*un point matériel pesant sur un plan incliné qui lui oppose une résistance de frottement*.

On peut en trouver l'application en Artillerie, dans l'étude de la pénétration des projectiles dans les milieux résistants et la théorie des ricochets ; on y rencontre en effet des trajectoires du genre de celles qui seront étudiées ici.

189. **Formules en fonction de τ.** — L'hodographe

$$du = \frac{cvF(v)}{g} d\tau,$$

deviendra, quand $cF(v)$ aura une valeur constante indépendante de la vitesse

$$\frac{du}{u} = h\,\frac{d\tau}{\cos\tau}, \text{ en posant : } \frac{cF}{g} = h$$

et cette équation qui rentre dans le type étudié aux nos 133 et 134 admet comme intégrale

$$\text{Log}\,\frac{u}{u_0} = h\,\text{Log}\,\frac{\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\tau}{2}\right)}{\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Les formules devenant particulièrement simples quand on prend pour origine de la trajectoire le sommet $(u_s, 0)$, on prendra l'intégrale de l'hodographe sous la forme :

$$u = u_s\,\text{tg}^h\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\tau}{2}\right).$$

L'angle τ a des valeurs positives en amont du sommet, et des valeurs négatives en aval.

Nous avons déjà posé (133)

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\tau}{2}\right) = \zeta,$$

et exprimé les fonctions trigonométriques de l'angle τ en fonction de ζ. On a :

$$\cos\tau = \frac{2\zeta}{1+\zeta^2}; \quad \sin\tau = \frac{\zeta^2-1}{\zeta^2+1}; \quad \frac{d\tau}{\cos\tau} = \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

On écrira donc tout d'abord

$$u = u_s\zeta^h.$$

D'après cela les formules donnant dt, dx et dy s'écriront :

$$dt = -\frac{u}{g}\frac{d\tau}{\cos^2\tau} = -\frac{u_s}{g}\zeta^{\mathrm{h}}\frac{1+\zeta^2}{2\zeta^2}d\zeta = -\frac{u_s}{2g}(\zeta^{\mathrm{h}-2}+\zeta^{\mathrm{h}})\,d\zeta$$

$$dx = -\frac{u^2}{g}\frac{d\tau}{\cos^2\tau} = -\frac{u_s^2}{g}\zeta^{2\mathrm{h}}\frac{1+\zeta^2}{2\zeta^2}d\zeta = -\frac{u_s^2}{2g}(\zeta^{2\mathrm{h}-2}+\zeta^{2\mathrm{h}})\,d\zeta$$

$$dy = -\frac{u^2}{g}\,\mathrm{tg}\,\tau\frac{d\tau}{\cos^2\tau} = -\frac{u_s^2}{g}\zeta^{2\mathrm{h}}\frac{\zeta^4-1}{4\zeta^3}d\zeta = -\frac{u_s^2}{4g}(\zeta^{2\mathrm{h}+1}-\zeta^{2\mathrm{h}-3})\,d\zeta.$$

En intégrant depuis le sommet où $\zeta = 1$, jusqu'au point (u, τ), on obtient les formules qui suivent :

$$u = u_s\,\zeta^{\mathrm{h}}$$

$$t = \frac{u_s}{2g}\frac{1}{h^2-1}\left[2h-(h+1)\zeta^{\mathrm{h}-1}-(h-1)\zeta^{\mathrm{h}+1}\right]$$

$$x = \frac{u_s^2}{2g}\frac{1}{4h^2-1}\left[4h-(2h+1)\zeta^{2\mathrm{h}-1}-(2h-1)\zeta^{2\mathrm{h}+1}\right]$$

$$y = \frac{u_s^2}{8g}\frac{1}{h^2-1}\left[-2+(h+1)\zeta^{2\mathrm{h}-2}-(h-1)\zeta^{2\mathrm{h}+2}\right]$$

190. **Formules en fonction de** u. — Comme on a : $\zeta = \left(\frac{u}{u_s}\right)^{\mathrm{h}}$, on pourra écrire les formules précédentes en prenant $\frac{u}{u_s}$ comme variable indépendante. On aura ainsi

$$\zeta = \left(\frac{u}{u_s}\right)^{\mathrm{h}};$$

$$t = \frac{u_s}{2g}\frac{1}{h^2-1}\left[2h-(h+1)\left(\frac{u}{u_s}\right)^{1-\mathrm{h}}-(h-1)\left(\frac{u}{u_s}\right)^{1+\mathrm{h}}\right]$$

$$x = \frac{u_s^2}{2g}\frac{1}{4h^2-1}\left[4h-(2h+1)\left(\frac{u}{u_s}\right)^{2-\mathrm{h}}-(2h-1)\left(\frac{u}{u_s}\right)^{2+\mathrm{h}}\right]$$

$$y = \frac{u_s^2}{8g}\frac{1}{h^2-1}\left[-2+(h+1)\left(\frac{u}{u_s}\right)^{2-2\mathrm{h}}-(h-1)\left(\frac{u}{u_s}\right)^{2+2\mathrm{h}}\right]$$

Mais on ne peut exprimer ζ en fonction explicite d'aucune des trois variables t, x, y ; les deux groupes de formules ci-dessus sont donc les seuls qu'on puisse former.

191. **Formules mixtes**. — Mais on peut écrire les formules suivantes, où les deux variables τ et u figurent.

$$u = u_s \operatorname{tg}^h \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2}\right)$$

$$t = \frac{h}{g} \frac{1}{h^2 - 1} \left[u_s - \frac{u}{\cos \tau}\left(1 - \frac{1}{h} \sin \tau\right)\right]$$

$$x = \frac{2h}{g} \frac{1}{4h^2 - 1} \left[u_s^2 - \frac{u^2}{\cos \tau} \left(1 - \frac{1}{2h} \sin \tau\right)\right]$$

$$y = \frac{1}{4g} \frac{1}{h^2 - 1} \left[- u_s^2 + \frac{u^2}{\cos^2 \tau} \left(1 + \sin^2 \tau - \frac{2}{h} \sin \tau\right)\right]$$

192. **Discussion du mouvement. Hodographe**. — Établissons tout d'abord le tableau des variations corrélatives de τ et de la variable $\zeta = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2}\right)$.

Pour τ variant de $+\frac{\pi}{2}$ à o et de o à $-\frac{\pi}{2}$

ζ varie de ∞ à 1 et de 1 à o.

La *vitesse horizontale* u décroît depuis ∞ jusqu'à zéro.

En fonction de v, on aura : $v = u_s \frac{\zeta^h}{\cos \tau}$ et comme $\cos \tau = \frac{2\zeta}{1 + \zeta^2}$, il viendra

$$v = \frac{u_s}{2} \left(1 + \zeta^2\right) \zeta^{h-1}.$$

La *tangente* à l'hodographe définie par la relation $\operatorname{tg} I = \frac{v d\tau}{dv}$ prend ici la forme :

$$\operatorname{tg} I = \frac{2\zeta}{h - 1 + (h + 1)\zeta^2}$$

Ceci posé, il nous faut examiner trois cas.

a) *Premier cas*. — $h > 1$.

L'équation $v = \frac{u_s}{2}(1 + \zeta^2)\zeta^{h-1}$ montre que la vitesse v devient *infinie* pour $\zeta = \infty$, c'est-à-dire pour $\tau = \frac{\pi}{2}$.

Au sommet, pour $\zeta = 1$, on a $v = u_s$.

Enfin pour $\zeta = 0$, on a $v = 0$. La *vitesse terminale est nulle*.

D'ailleurs la valeur de

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{dv}{d\zeta}\frac{d\zeta}{d\tau} = \frac{u_s}{4}(1 + \zeta^2)(h - 1 + (h + 1)\zeta^2)\zeta^{h-2}$$

montre que cette quantité est toujours *positive*. Il n'existe donc pas de *minimum de vitesse réel*. La vitesse décroît d'une manière continue de ∞ à zéro.

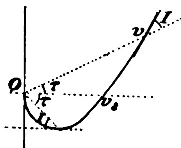


Fig. 60.

La tangente au sommet $\zeta = 1$ est telle que $\operatorname{tg} I = \frac{1}{h}$.

Au point $\zeta = 0$, on a $\operatorname{tg} I = 0$.

Il existe un point où la tangente à l'hodographe est horizontale : il est déterminé par la relation

$$\operatorname{tg} I = \operatorname{tg} \tau = \frac{\zeta^2 - 1}{2\zeta}$$

On a ainsi l'équation :

$$(h+1)\,\zeta^4 - 6\zeta^2 - (h-1) = 0.$$

qui détermine la valeur de

$$\zeta^2 = \frac{3+\sqrt{8+h^2}}{h+1}.$$

La forme de l'hodographe, dans le cas de $h > 1$, est indiquée par la figure 60 ci-dessus.

b) *Deuxième cas.* — $h < 1$.

Pour $\zeta = \infty$, la valeur de v se présente sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$. En prenant la vraie valeur, on trouve

$$v = u_s \frac{\zeta^{1+h}}{1-h}$$

ce qui donne $v = \infty$, pour $\tau = \frac{\pi}{2}$, comme dans le cas de $h > 1$.

Au sommet, pour $\zeta = 1$, on a $v = u_s$ et enfin pour $\zeta = 0$, on a $v = \infty$. La *vitesse terminale* est infinie.

Il existe un minimum de vitesse, où $\frac{dv}{d\tau}$ s'annule et qui répond à la relation

$$\zeta^2 = \frac{1-h}{1+h}.$$

Comme on a : $\sin\tau = \frac{\zeta^2-1}{\zeta^2+1}$, on trouve que la valeur τ_m du minimum répond à l'équation

$$\sin\tau_m + h = 0,$$

ce qui est bien, dans le cas actuel, la transcription de l'équation générale $\frac{cF}{g} + \sin\tau = 0$ (106).

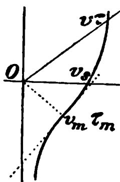


Fig 61.

L'hodographe a donc la forme indiquée sur la figure 61 ci-contre.

c) *Troisième cas.* — $h = 1$.

On a alors $v = \frac{u_s}{2}(1 + \zeta^2)$.

La vitesse part de l'infini, pour $\tau = \frac{\pi}{2}$, devient égale à u_s au sommet, puis à $\frac{u_s}{2}$ au point $\tau = -\frac{\pi}{2}$.

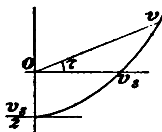


Fig. 62.

La tangente $\operatorname{tg} I = \frac{1}{\zeta}$ au point $-\frac{\pi}{2}$ est infinie, c'est-à-dire que l'hodographe vient aboutir horizontalement. Il n'y a pas de minimum de vitesse, et l'hodographe présente la forme de la figure 62 ci-contre.

193. **Discussion de la trajectoire**. — Écrivons les équations du mouvement avec la variable ζ (189)

$$u = u_s \zeta^h$$

$$t = \frac{u_s}{2g}\,\frac{1}{h^2 - 1}\left[2h - (h+1)\zeta^{h-1} - (h-1)\zeta^{h+1}\right]$$

$$x = \frac{u_s^2}{2g}\,\frac{1}{4h^2 - 1}\left[4h - (2h+1)\zeta^{2h-1} - (2h-1)\zeta^{2h+1}\right]$$

$$y = \frac{u_s^2}{8g}\,\frac{1}{h^2 - 1}\left[-2 + (h+1)\zeta^{2h-1} - (h-1)\zeta^{2h+1}\right]$$

a) *Premier cas.* — $h > 1$.

Branche ascendante. — Pour aller du point Ω, à

l'infini sur la branche ascendante, au sommet, il faut faire $\zeta = \infty$. Le temps t est donc infini. Comme aucune autre valeur ne rend le temps infini, le mobile lancé d'un point quelconque sous un angle quelconque ne s'arrêtera donc jamais avant d'avoir atteint le sommet u_s.

D'ailleurs x et y sont infinis au point Ω, et en cette région, la trajectoire a une forme parabolique (121).

Branche descendante. — Faisons $\zeta = 0$ et soient t', x', y' les éléments du point $v = 0$ et $\tau = -\frac{\pi}{2}$ de la trajectoire.

1° *t' est fini*, le projectile s'arrête au bout d'un temps

$$t' = \frac{u_s}{g} \frac{h}{h^2 - 1}.$$

2° *x' est fini*; l'abscisse du point d'arrêt de la trajectoire est donnée par l'équation

$$x' = \frac{u_s^2}{g} \frac{2h}{4h^2 - 1}.$$

3° *y' est fini*; l'ordonnée du point d'arrêt de la trajectoire est donnée par l'équation

$$y' = -\frac{u_s^2}{4g} \frac{1}{h^2 - 1}.$$

4° la tangente $\frac{dy}{dx}$ en un point de la trajectoire est donnée par la formule

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2} \frac{1 - \zeta^2}{\zeta}.$$

Au point $v = 0$, on vérifie bien que la tangent est verticale.

La trajectoire a donc la forme I ci-contre (fig. 63).

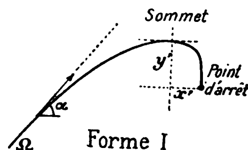


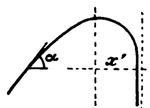
Fig. 63.

b) *Deuxième cas.* — $h < 1$.

Branche ascendante. — Mêmes propriétés que dans le cas précédent.

Branche descendante. — En faisant $\zeta = 0$, on voit que t' et y' sont infinis.

Mais si $h > \frac{1}{2}$, l'abscisse x' sera finie et par suite il y aura une asymptote verticale à distance finie. Si, au contraire, $h < \frac{1}{2}$, le point x' est répété à l'infini; la trajectoire a une branche parabolique. On aura ainsi les deux formes suivantes de la figure 64.



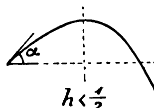


Fig. 64.

c) *Troisième cas.* — $h = 1$.

On trouve tout d'abord que les formules générales

qui se présentent sous forme indéterminée deviennent

$$u = u_s \zeta$$

$$x = -\frac{u_s^2}{2g}\left[\zeta + \frac{1}{3}\zeta^3 - \frac{4}{3}\right]$$

$$t = -\frac{u_s}{2g}\left[\text{Log}\,\zeta + \frac{1}{2}(\zeta^2 - 1)\right]$$

$$y = -\frac{u_s^2}{2g}\left[\frac{1}{4}\zeta^3 - \text{Log}\,\zeta - \frac{1}{4}\right]$$

On voit que t' et y' deviennent infinis à cause de Log ζ, qui y figure, mais que x' est fini et prend la valeur

$$x' = \frac{2}{3}\frac{u_s^2}{g}.$$

La trajectoire a donc la forme de celle représentée ci-dessus $1 > h > \frac{1}{2}$ (fig. 64, forme II).

194. **Mouvement sur un plan incliné, avec frottement**[1]. — Si un mobile de poids p se meut, avec frottement sur un plan incliné, les composantes de son poids sont normalement au plan $p \cos i$ et dans le plan $p \sin i$. Les deux forces qui agissent sur lui sont donc $pf \cos i$ pour le frottement, $p \sin i$ pour la gravité. Le rapport $\frac{cF}{g} = h$ des théorèmes précédents a pour expression $h = f \operatorname{cotg} i$. Si φ est l'angle de frottement, tel que $\operatorname{tg} \varphi = f$, on a $h = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} i}$.



Fig. 65.

[1] *Erratum à la figure 65.* Au lieu de l'angle τ lire l'angle i.

h varie ainsi de $h = \infty$ pour tg $i = 0$ (cas du mouvement rectiligne avec frottement étudié antérieurement, (52)) à $h = 0$ pour tg $i = \infty$ c'est-à-dire $i = \frac{\pi}{2}$ (cas du mouvement dans le vide).

On obtiendra ainsi successivement en faisant varier l'inclinaison i toutes les trajectoires discutées plus haut et dont les formes varient par degré insensible à partir de la ligne droite ($i = 0$), en passant par la forme I (fig. 63) avec point d'arrêt ($i < \varphi$), puis par la forme II (fig. 64), avec asymptote verticale $\left(\text{tg}\, i \geqq \text{tg}\, \varphi > \frac{1}{2}\, \text{tg}\, i\right)$, et enfin par la forme III (fig. 64), avec branche descendante parabolique $\left(\text{tg}\, \varphi < \frac{1}{2}\, \text{tg}\, i\right)$; cette dernière trajectoire se rapproche de plus en plus de celle du vide qui correspond à tg $i = \infty$.

§ 2. — Résistance proportionnelle a la vitesse

195. **Équations finies du mouvement.** — Dans le cas d'une résistance proportionnelle à la simple vitesse, le problème balistique peut être poussé jusqu'au bout et la solution complète peut en être mise sous forme de relations explicites entre les différents éléments de la trajectoire. Cette solution est d'ailleurs connue depuis longtemps.

On suppose donc $F(v) = B_1 v_1$ et on pose $cB_1 = b_1$. L'intégrale $\int_0^\tau \frac{d\tau}{\cos^{n+1}\tau}$ devient pour $n = 1$

$$\int_0^\tau \frac{d\tau}{\cos^2\tau} = \text{tg}\, \tau$$

et l'équation différentielle de l'hodographe

$$\frac{g}{b_1}\frac{du}{u^2} = \frac{d\tau}{\cos^2\tau}$$

s'intègre immédiatement sous la forme :

$$\operatorname{tg}\alpha + \frac{g}{b_1 u_0} = \operatorname{tg}\tau + \frac{g}{b_1 u} = Q.$$

Les autres équations différentielles du mouvement, étant en fonction de u et τ les suivantes (88) :

$$dt = -\frac{u}{g}\frac{d\tau}{\cos^2\tau}; \quad dx = -\frac{u^2}{g}\frac{d\tau}{\cos^2\tau}; \quad dy = -\frac{u^2}{g}\operatorname{tg}\tau\frac{d\tau}{\cos^2\tau}$$

elles deviendront, en y remplaçant $\frac{d\tau}{\cos^2\tau}$ par $\frac{g}{b_1}\frac{du}{u^2}$ et $\operatorname{tg}\tau$ par $\left(Q - \frac{g}{b_1 u}\right)$ et intégrant :

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{g}{b_1}\int_{u_0}^{u}\frac{du}{u^2} \qquad = Q - \frac{g}{b_1}\frac{1}{u}$$

$$b_1 t = -\int_{u_0}^{u}\frac{du}{u} \qquad = \operatorname{Log}\frac{u_0}{u}$$

$$b_1 x = -\int_{u_0}^{u} du \qquad = u_0 - u$$

$$b_1 y = -\int_{u_0}^{u}\left(Q - \frac{g}{b_1 u}\right) du \qquad = Q(u_0 - u) - \frac{g}{b_1}\operatorname{Log}\frac{u_0}{u}$$

On a ainsi tous les éléments de la trajectoire en fonction de la variable u.

Mais les formules précédentes permettent d'exprimer immédiatement u en fonction de toutes les autres variables, y excepté. On pourra donc obtenir quatre systèmes de formules où les variables seront une des quatre

lettres u, x, t ou $\operatorname{tg}\tau$. Ces systèmes sont les suivants :

Variable u

»

$$\operatorname{tg}\tau = Q - \frac{g}{b_1}\frac{1}{u}$$

$$b_1 t = \operatorname{Log}\frac{u_0}{u}$$

$$b_1 x = u_0 - u$$

$$b_1 y = Q(u_0 - u) - \frac{g}{b_1}\operatorname{Log}\frac{u_0}{u}$$

Variable τ

$$u = \frac{g}{b_1}\frac{1}{Q - \operatorname{tg}\tau}$$

»

$$b_1 t = \operatorname{Log}\frac{b_1}{g}u_0(Q - \operatorname{tg}\tau)$$

$$b_1 x = u_0 - \frac{g}{b_1}\frac{1}{Q - \operatorname{tg}\tau}$$

$$b_1 y = Q\left[u_0 - \frac{g}{b_1}\frac{1}{Q - \operatorname{tg}\tau}\right] - \frac{g}{b_1}\operatorname{Log}\frac{b_1}{g}u_0(Q - \operatorname{tg}\tau)$$

Variable t

$$u = u_0 e^{-b_1 t}$$

$$\operatorname{tg}\tau = Q - \frac{g}{b_1}\frac{e^{b_1 t}}{u_0}$$

»

$$b_1 x = u_0(1 - e^{-b_1 t})$$

$$b_1 y = Q u_0(1 - e^{-b_1 t}) - gt$$

Variable x

$$u = u_0 - b_1 x$$

$$\operatorname{tg}\tau = Q - \frac{g}{b_1}\frac{1}{u_0 - b_1 x}$$

$$b_1 t = -\operatorname{Log}\left(1 - \frac{b_1 x}{u_0}\right)$$

»

$$b_1 y = Q b_1 x + \frac{g}{b_1}\operatorname{Log}\left(1 - \frac{b_1 x}{u_0}\right)$$

196. **Hodographe.** — L'hodographe a pour équation

$$\operatorname{tg}\tau = Q - \frac{g}{b_1}\frac{1}{u}$$

qui peut s'écrire

$$\frac{b_1 v}{g} = \frac{1}{Q \cos \tau - \sin \tau}$$

C'est l'équation d'une droite en coordonnées polaires : elle est inclinée sur l'horizontale d'un angle Θ tel que $Q = \operatorname{tg} \Theta$. Elle coupe l'horizontale au point $(\tau = 0, v = V_s)$ et la verticale au point $\left(\tau = -\frac{\pi}{2}, v = v'\right)$.

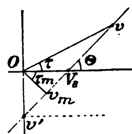


Fig. 66.

On peut écrire l'hodographe, en remplaçant Q par $\operatorname{tg} \Theta$:

$$\frac{b_1 v}{g} \frac{\sin (\Theta - \tau)}{\cos \Theta} = 1.$$

Entre les données à l'origine (V_0, α, b_1), et les quantités Q, Θ, v' (vitesse terminale), v_m (vitesse minimum), V_s (vitesse au sommet), on a les relations :

$$Q = \operatorname{tg} \alpha + \frac{g}{b_1} \frac{1}{V_0 \cos \alpha}, \qquad v_m = v' \cos \Theta,$$

$$Q = \operatorname{tg} \Theta, \qquad v' = \frac{g}{b_1},$$

$$V_s = v' \operatorname{cotg} \Theta, \qquad \tau_m = \frac{\pi}{2} - \Theta.$$

197. **Trajectoire.** — 1° *L'équation de la trajectoire* est la dernière du tableau du n° 175 :

$$b_1 y = Q b_1 x + \frac{g}{b_1} \operatorname{Log}\left(1 - \frac{b_1 x}{u_0}\right)$$

ou encore

$$y = x \operatorname{tg} \alpha + \frac{gx}{b_1 u_0} + \frac{g}{b_1^2} \operatorname{Log}\left(1 - \frac{b_1 x}{u_0}\right).$$

La *tangente* en un point est donnée par l'équation :

$$\operatorname{tg} \tau = \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx}{u_0^2\left(1 - \dfrac{b_1 x}{u_0}\right)}.$$

2° *La branche ascendante est de forme parabolique.* — En effet en écrivant l'équation de la trajectoire :

$$y = x \operatorname{tg} \Theta + \frac{g}{b_1^2} \operatorname{Log}\left(1 - \frac{b_1 x}{u_0}\right),$$

on voit que pour $x = -\infty$, la quantité $(y - x \operatorname{tg} \Theta)$ devient infinie ; l'asymptote du point Ω (120) est donc rejetée à l'infini.

3° Les formules *du sommet de la trajectoire* sont les suivantes :

$$V_s = v' \operatorname{cotg} \Theta, \qquad X_s = \frac{u_0 - V_s}{b_1},$$

$$T_s = \frac{1}{b_1} \operatorname{Log} \frac{u_0}{V_s}, \qquad Y_s = \frac{V_s}{b_1} \operatorname{tg} \Theta \left[u_0 - V_s + \operatorname{Log} \frac{V_s}{u_0}\right]$$

4° *L'asymptote verticale* est à une distance X' de l'origine donnée par la formule $X' = \dfrac{u_0}{b_1}$.

On en déduit le théorème suivant :

Si en chaque point d'une trajectoire, on mène la tangente et qu'on prenne une longueur égale à $\dfrac{v}{b_1}$ *sur cette tan-*

gente, les points ainsi obtenus sont situés sur l'asymptote de la trajectoire.

5° *Point de chute.* — Introduisant le rapport $\frac{X}{X'}$, et faisant $y=0$, on obtient les formules suivantes du point de chute :

$$\frac{X'}{X}\operatorname{Log}\left(1-\frac{X}{X'}\right)=-\frac{u_0}{V_s};\quad u_\omega=u_0\left(1-\frac{X}{X'}\right);$$

$$b_1T=-\operatorname{Log}\left(1-\frac{X}{X'}\right);\quad \operatorname{tg}\omega=\operatorname{tg}\Theta\left[1-\frac{V_s}{u_0}\frac{1}{1-\frac{X}{X'}}\right]$$

6° *Forme de la trajectoire.* — La trajectoire est figurée ci-contre avec la branche isolée correspondant aux vitesses $V_0 > v'$, sous un angle négatif.

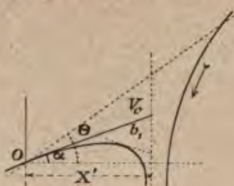


Fig. 67.

On remarquera que sur cette branche, il n'existe pas de point de vitesse minimum, ni de point de vitesse verticale minimum.

7° En développant en série $\operatorname{Log}\left(1-\frac{b_1x}{u_0}\right)$ on obtient l'expression suivante pour la trajectoire :

$$y=x\operatorname{tg}\alpha-\frac{g}{b_1^2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{b_1x}{u_0}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{b_1x}{u_0}\right)^3+\frac{1}{4}\left(\frac{b_1x}{u_0}\right)^4\dots\right]$$

Cette série est toujours convergente parce que $\frac{b_1x}{u_0}$ est toujours plus petit que 1, puisqu'on peut écrire :

$$\frac{b_1x}{u_0}=\frac{x}{X'}.$$

198. Exercices. — *Théorèmes à démontrer.*

1. *Les mouvements du projectile suivant les deux axes Ox et Oy sont indépendants l'un de l'autre.*

Prendre les équations différentielles du mouvement (2° ordre), y faire $cF = b_1 v$ et les mettre sous la forme

$$\frac{d(v\cos\tau)}{dt} = -b_1(v\cos\tau);\quad \frac{d(v\sin\tau)}{dt} = -g - b_1(v\sin\tau)$$

ce qui démontre le théorème.

2. *Rapportée aux axes obliques de l'origine, la trajectoire est indépendante de l'angle de projection.*

Le démontrer, soit en partant de l'équation explicite de la trajectoire, soit en intégrant directement les équations du n° 94 dans l'hypothèse $F(v) = b_1 v$.

3. *Ainsi que dans le vide, les abaissements au-dessous de la tangente à l'origine pour un même éloignement sur la ligne de projection, sont les mêmes, quel que soit l'angle de projection.*

Conséquence du théorème précédent. En déduire un mode de construction des trajectoires (V_0 = const.) point par point. Tangente aux points conjugués.

4. Intégrer directement dans le cas de $F(v) = b_1 v$ les formules du n° 164. On trouve :

$$\frac{b_1 u}{g} = \frac{1}{Q - \operatorname{tg}\tau}, \qquad \frac{b_1^2 x}{g} = \frac{1}{Q - \operatorname{tg}\alpha} - \frac{1}{Q - \operatorname{tg}\tau}$$

$$b_1 t = \operatorname{Log}\frac{Q - \operatorname{tg}\alpha}{Q - \operatorname{tg}\tau}, \qquad \frac{b_1^2 y}{g} = Q\left[\frac{1}{Q - \operatorname{tg}\alpha} - \frac{1}{Q - \operatorname{tg}\tau}\right] - \operatorname{Log}\frac{Q - \operatorname{tg}\tau}{Q - \operatorname{tg}\alpha}$$

199. Théorèmes sur la portée maximum. — *Déterminer la portée maximum X_m et l'angle de portée maximum α_m.*

Prenons la variable u, dans les systèmes du n° 195.

On aura pour déterminer la portée X les deux équations :

$$b_1 X = u_0 - u_\omega, \qquad \left(\operatorname{tg}\alpha + \frac{g}{b_1 u_0}\right)(u_0 - u_\omega) = \frac{g}{b_1} \operatorname{Log} \frac{u_0}{u_\omega}$$

D'après la première équation, la portée maximum sera définie par la condition $du_0 = du_\omega$. En portant cette égalité dans la deuxième équation différentiée par rapport à α, u_0 et u_ω, il viendra :

$$(u_0 - u_\omega)\left(\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{g}{b_1}\frac{du_0}{u_0^2}\right) = \frac{g}{b_1}\left(\frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_\omega}\right) du_0$$

et, comme $du_0 = -V_0 \sin\alpha\, d\alpha$, on obtiendra la valeur suivante pour $(u_\omega)_m$ au point de portée maximum :

$$(u_\omega)_m = g \frac{V_0 \sin\alpha_m \cos\alpha_m}{b_1 V_0 + g \sin\alpha_m}.$$

Portant cette valeur dans les équations du n° 195, et posant

$$1 + \frac{b_1 V_0}{g \sin\alpha_m} = \lambda,$$

on trouve comme expressions des éléments du point de portée maximum, les formules suivantes :

$$X_m = \frac{V_0^2}{g} \frac{\operatorname{cotg}\alpha_m}{\lambda}, \qquad (u_\omega)_m = \frac{u_0}{\lambda},$$

$$T_m = \frac{1}{b_1} \operatorname{Log}\lambda, \qquad \operatorname{tg}\omega_m = \operatorname{tg}\alpha_m + \frac{g}{b_1 u_0}[1 - \lambda]$$

$$\left(\frac{b_1 V_0}{g}\right)^2 = \frac{\lambda}{1 + \left(\frac{g}{b_1 V_0}\right)^2 (\lambda - 1)} \operatorname{Log}\lambda$$

La dernière équation est une relation entre λ et $\frac{b_1 V_0}{g}$ c'est-à-dire entre l'angle de projection α_m qui figure dans λ et le rapport $\frac{b_1 V_0}{g}$. Une table calculée une fois pour toutes permettrait donc de déterminer l'angle de projection α_m de portée maximum.

— Démontrer que quand le rapport $\frac{b_1 V_0}{g}$ varie de o (vide) à ∞ (mouvement rectiligne), l'angle α_m varie de $\frac{\pi}{4}$ à o.

200. Exercices. — 1° Démontrer que

$$\omega_m = \frac{\pi}{2} - \alpha_m.$$

L'angle de chute de la portée maximum est complémentaire de l'angle de projection correspondant [développer le second membre de l'expression de $\operatorname{tg} \omega_m$].

2° Le point de vitesse minimum ne peut coïncider avec le point de chute de la portée maximum ; il est toujours au-dessus du sol.

3° L'angle α_m de portée maximum est plus petit que $\frac{\pi}{4}$.

4° En employant les notations suivantes qui introduisent la vitesse terminale v' :

$$b_1 v' = g \qquad \text{et} \qquad \mu = \frac{V_0}{v' \sin \alpha_m}.$$

l'équation qui fait connaître l'angle de portée maximum α_m peut se mettre sous la forme :

$$\left(\frac{V_0}{v'}\right)^2 \left(1 + \frac{v'}{V_0 \sin \alpha_m}\right) = \left(1 + \frac{V_0}{v' \sin \alpha_m}\right) \operatorname{Log} \left(1 + \frac{V_0}{v' \sin \alpha_m}\right)$$

et par suite :

$$\sin^2 \alpha_m = \frac{(1 + \mu) \operatorname{Log} (1 + \mu) - \mu}{\mu^2} \qquad (1)$$

D'autre part, la portée maximum X_m s'exprime en fonction de μ et α_m par la formule :

$$\frac{2g\,X_m}{v_2'} = \mu^2 \frac{\sin 2\alpha_m}{1+\mu} \qquad (2)$$

Avec ces formules on peut calculer une table numérique, permettant de résoudre le problème ; en voici un extrait :

μ	$\frac{V_0}{v'}$	α_m	$\frac{2gX_m}{v'^2}$
0,0	0,0000	45°	0,0000
0,1	0,0696	44,6	0,0090
0,2	0,1371	43,16	0,0333
0,5	0,3293	41,12	0,1652
1,0	0,6216	38,26	0,4869
2,5	1,1386	34,42	1,2479
5,0	2,3973	28,39	3,5060
10,0	4,0461	23,52	6,7275
100,0	19,1380	11,2	37,1965
∞	∞	0	∞

Pour calculer α_m, connaissant la vitesse initiale V_0 et la vitesse finale $v' = \frac{g}{b_1}$, on entrera par la 2e colonne[1].

§ 3. — Résistance cubique. Solution de Greenhill

201. **Historique**. — L'hypothèse de $n = 1$ a été considérée longtemps comme la seule qui permît une intégration rigoureuse et complète du problème balistique.

[1] Cette table est extraite de Greenhill (*R. mar. et coloniale*, 1890, p. 439, traduct. Gossot) ; elle est analogue à une table dite de Hutton calculée pour $n = 2$ et reproduite dans le même travail (p. 431).

Assez récemment, le professeur Greenhill de Woolwich a donné, par les fonctions elliptiques, la solution de la question du mouvement des projectiles lorsque la résistance est proportionnelle au cube de la vitesse ; la traduction de son mémoire a été donnée par le Ct Gossot dans la *Revue maritime et coloniale*[1]. Elle est également reproduite dans « Les fonctions elliptiques et leurs applications » de M. Greenhill[2], ainsi que dans « Les principes de la théorie des fonctions elliptiques » de MM. Appel et Lacour[3] et dans le « Précis élémentaire de la théorie des fonctions elliptiques »[4] de M. Lévy. Enfin M. de Sparre a traité le même problème avec quelques développements nouveaux dans le *Mémorial de l'Artillerie de la Marine*[5].

Nous renverrons aux ouvrages ci-dessus pour le développement des calculs et nous nous bornerons à donner l'indication générale de la méthode.

202. **Équations différentielles du mouvement.** — Nous avons vu que, dans le cas d'une résistance cubique, le point Ω de la branche ascendante où la vitesse est infinie était à distance finie (121) ; la tangente en ce point a l'inclinaison Θ sur l'horizontale.

Nous prendrons pour origine le point Ω, et, pour axes, les axes obliques constitués par la verticale du point Ω et par la tangente Θ en ce point.

Rapportées à ce système d'axes, les équations diffé-

[1] Mai-juin 1891.

[2] Traduction française de M. Griess, p. 375 et suivantes.

[3] P. 225 et suivantes.

[4] P. 121 et suivantes.

[5] T. XXVII, 1899, p. 427.

rentielles du mouvement établies au n° 94 seront les suivantes :

$$dv_z = -\frac{v_z}{g}\frac{cF}{v}\,dp, \qquad dz = \frac{v_z}{g}\,dp,$$

$$dt = \frac{v_z}{g}\,dp, \qquad dy = \frac{v_z}{g}\,p\,dp.$$

Dans ces formules v_z est égal à $\frac{dz}{dt}$ et on a :

$$v = v_z\,[1 + p^2 - 2p\sin\Theta]^{\frac{1}{2}}$$

p est égal à $\frac{dy}{dz}$.

Si on fait maintenant $cF(v) = b_3v^3$ et si on pose $b_3v'^3 = g$, la vitesse v' sera la vitesse terminale de la branche descendante. Avec ces notations, l'équation de l'hodographe deviendra :

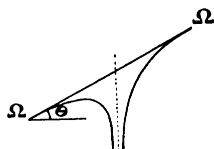


Fig. 68.

$$dv_z = -\frac{v_z}{v'^3}\,v^2dp.$$

203. **Intégration de l'hodographe**. — Remplaçant v^2 par sa valeur en fonction de v_z et de p, on aura

$$-v'^3\,\frac{dv_z}{v_z} = [p^2 - 2p\sin\Theta + 1]\,dp$$

et cette équation est immédiatement intégrable, les variables étant séparées, sous la forme :

$$\frac{1}{3}\left(\frac{v'}{v_z}\right)^3 = \frac{p^3}{3} - p^2\sin\Theta + p.$$

On a choisi la constante d'intégration de manière que, pour $p = 0$, on eût $v = \infty$.

Posons : $\frac{1}{3} P = \frac{p^3}{3} - p^2 \sin\Theta + p.$

On aura $\frac{v'}{v_z} = P^{\frac{1}{3}}$, de sorte que les équations du mouvement seront :

$$v_z = v' P^{-\frac{1}{3}}, \qquad \frac{gz}{v'^2} = \int_0^p P^{-\frac{2}{3}} dp,$$

$$\frac{gt}{v'} = \int_0^p P^{-\frac{1}{3}} dp, \qquad \frac{gy}{v'^2} = \int_0^p P^{-\frac{2}{3}} p dp.$$

204. Intégration de l'équation de l'abscisse. — Soit une variable ψ définie par la formule $\psi = \frac{P^{\frac{1}{3}}}{3p}$.

Formons la quantité $(4\psi^3 - g_3)$, g_3 étant une constante arbitraire. On a :

$$4\psi^3 - g_3 = \frac{4p^2 - 12p \sin\Theta + 12 - 27 g_3 p^2}{27p^2}$$

et déterminons l'arbitraire g_3 de manière que le numérateur soit un carré parfait ; il suffira de prendre :

$$g_3 = \frac{4 - 3\sin^2\Theta}{27}$$

Il viendra alors :

$$\sqrt{4\psi^3 - g_3} = \frac{\sin\Theta}{3} - \frac{2}{3p}$$

d'où en différentiant :

$$\frac{6\psi^2 d\psi}{\sqrt{4\psi^3 - g_3}} = \frac{2}{3}\frac{dp}{p^2}$$

ou, d'après l'expression de ψ en P et p :

$$\frac{d\psi}{\sqrt{4\psi^3 - g_3}} = \frac{dp}{P^{\frac{2}{3}}}.$$

On aura donc, pour l'éloignement z, la formule :

$$\frac{gz}{v'^2} = \int^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{4\psi^3 - g_3}}$$

Pour $p = 0$, on a, en effet, $\psi = \infty$.

Posons $\frac{gz}{v'^2} = \nu$.

L'intégrale

$$\nu = \int_{\infty}^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{4\psi^3 - g_3}}$$

définit une *fonction elliptique* dont l'invariant g_2 est nul.

On écrira alors :

$$\psi = \wp(\nu\,;\,0, g_3) = \wp\nu$$

la fonction $\wp$ désignant le symbole des fonctions elliptiques.

Mais la formule d'homogénéité de ces fonctions :

$$\wp(\nu\,;\,0,\ g_3) = m^2 \wp\left(m\nu\,;\,0,\ \frac{g_3}{m^6}\right)$$

permet de remplacer la fonction $\wp(\nu\,;\,0,\ g_3)$ par une fonction $\wp(m\nu\,;\,0,\ 1)$ à condition de prendre $m = \sqrt[6]{g_3}$ et pour variable $\nu\sqrt[6]{g_3}$ au lieu de ν.

On aura ainsi :

$$\wp(\nu\,;\,0,\ g_3) = \sqrt[3]{g_3}\ \wp(\nu\sqrt[6]{g_3}\,;\,0,\ 1).$$

Les deux invariants de la dernière fonction étant o et 1, il ne reste de variable que l'argument $\nu\sqrt[6]{g_3}$ et par suite une *table à simple entrée* donnant la fonction $\wp(\nu\sqrt[6]{g_3})$ en regard de la variable $\nu\sqrt[6]{g_3}$ permettra le calcul de l'abscisse. En effet, ψ étant connu, en fonction des données initiales, par la formule $\psi = \dfrac{P^{\frac{1}{3}}}{3p}$, on aura :

$$\wp(\nu\sqrt[6]{g_3}) = \frac{P^{\frac{1}{3}}}{3p\sqrt[6]{g_3}}$$

et la table fera connaître en regard de $\wp$ la valeur de l'argument $\nu\sqrt[6]{g_3}$, d'où on déduira z, puis l'abscisse x qui est telle que $x = z \cos \Theta$.

Rappelons que l'abscisse ainsi calculée est comptée à partir du point Ω de la branche descendante, où la vitesse est infinie.

Une table de la fonction $\wp(\nu\,;\,0,\ 1)$ a été calculée par Greenhill (*loc. cit.*).

205. **Asymptote verticale.** — De la relation $\psi = \wp\nu$, on tire $\dfrac{d\psi}{d\nu} = \wp'\nu$; on aura donc :

$$\wp'\nu = \sqrt{4\psi^3 - g_3}.$$

Mais (204) on a trouvé :

$$\sqrt{4\psi^3 - g_3} = \frac{\sin\Theta}{3} - \frac{2}{3p}.$$

On aura donc :

$$p = \frac{2}{\sin\Theta - 3\wp'\nu}.$$

Par suite, p deviendra infini pour une valeur ν' de ν telle que

$$\sin\Theta = 3\wp'\nu'.$$

Élevons au carré : $\sin^2\Theta = 9\wp'^2\nu'$ et comme

$$\wp'\nu = \sqrt{4\wp^3\nu - g_3}$$

il vient : $$\sin^2\Theta = 36\,\wp^3\nu' - 9g_3.$$

Si on remplace maintenant g_3 par sa valeur $\dfrac{4-3\sin^2\Theta}{27}$, on aura :

$$\wp\nu' = \frac{1}{3}.$$

Cette relation permet au moyen de la table numérique de la fonction $\wp$ de déterminer l'abscisse

$$x_\infty = \nu'\cos\Theta$$

où $p = \infty$; c'est l'abscisse de l'asymptote verticale et l'amplitude totale de la trajectoire depuis Ω jusqu'à $-\dfrac{\pi}{2}$.

206. **Ordonnée.** — On a :

$$\frac{gy}{v'^2} = \int_0^{\mathrm{p}} \mathrm{p}^{-\frac{2}{3}}\,pdp.$$

D'après les relations du n° 204, on a :

$$\mathrm{p}^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3p\psi} \qquad \text{et} \qquad dp = 9\,p^2\psi^2 d\nu.$$

Il viendra alors :

$$\frac{gy}{v'^2} = \int_0^{\nu} pd\nu$$

Mais $p = \dfrac{2}{\sin \Theta - 3\wp'\nu}$, et si on introduit la valeur ν' correspondant à l'asymptote verticale, qui est telle que $\sin \Theta = 3\wp'\nu'$, il viendra :

$$\frac{gy}{v'^2} = \frac{2}{3}\int_0^{\nu} \frac{d\nu}{\wp'\nu' - \wp'\nu}.$$

L'intégration de cette fonction [1] se fera sous la forme :

$$\frac{gy}{v'^2} = -\operatorname{Log} \sigma(\nu' - \nu) - \alpha \operatorname{Log} \sigma(\alpha\nu' - \nu) - \alpha^2 \operatorname{Log} \sigma(\alpha^2\nu' - \nu) - 3\nu\zeta\nu'$$

équation où

α représente la racine cubique imaginaire de l'unité :

$$\alpha = \sqrt[3]{-1},$$

$\zeta\nu$ la fonction de Weierstrass dont la définition est

$$\wp\nu = -\frac{d}{d\nu}\zeta\nu,$$

$\sigma\nu$ la fonction de Weierstrass dont la définition est

$$\zeta\nu = \frac{d}{d\nu}\operatorname{Log} \sigma\nu.$$

On trouve, dans le mémoire de M. Greenhill, la table des fonctions $\zeta\nu$ et $\sigma\nu$ pour les invariants $g_2 = 0$ et $g_3 = 1$.

Comme la variable ν représente $\dfrac{gz}{v'^2}$ ou $\dfrac{gx}{v'^2 \cos \Theta}$, on voit que l'expression de y donne en réalité l'équation de la trajectoire.

[1] Voir M. Lévy, *Précis élémentaire des fonctions elliptiques*, p. 126.

L'expression de y est compliquée d'imaginaires et ne peut par suite être calculée numériquement. M. de Sparre est parvenu à en donner une expression où tous les termes sont réels, mais sous la forme d'une série trigonométrique [1].

207. **Temps.** — On transformera par le même procédé que ci-dessus l'intégrale du temps

$$\frac{gt}{v'} = \int_0^p \mathrm{P}^{-\frac{1}{3}} dp$$

en la suivante :

$$\frac{gt}{v'} = 2 \int_0^\nu \frac{\wp\nu d\nu}{\wp'\nu' - \wp'\nu}.$$

qui s'intégrera par la formule :

$$\frac{gt}{v'} = -\operatorname{Log} \sigma(\nu' - \nu) - \alpha \operatorname{Log} \sigma(\alpha\nu' - \nu) - \alpha^2 \operatorname{Log} \sigma(\alpha^2\nu' - \nu) + \text{const.}$$

avec la condition que $t = 0$ pour $\nu = 0$.

Les lettres ont la même signification que dans l'intégrale de y.

208. **Point de vitesse minimum.** — L'équation

$$v^2 = v_z^2 [1 + p^2 - 2p \sin \Theta]$$

en y portant la valeur de v_z trouvée au nº 203 devient :

$$v^2 = v'^2 \mathrm{P}^{-\frac{2}{3}} [1 + p^2 - 2p \sin \Theta]$$

avec
$$\frac{1}{3} \mathrm{P} = \frac{p^3}{3} - p_2 \sin \Theta + p.$$

[1] *Mém. Art. Mar.*, 1899, p. 443.

Différentiant logarithmiquement les deux membres, il viendra :

$$\frac{dv^2}{v^2} = -2\left[\frac{p^2 - 2p\sin\Theta + 1}{p^3 - 3p^2\sin\Theta + 3p} - \frac{p - \sin\Theta}{1 + p^2 - 2p\sin\Theta}\right]$$

et cette formule conduit pour le point de *vitesse minimum* ($dv = 0$) à la relation

$$p_m^2\cos^2\Theta + p_m\sin\Theta - 1 = 0.$$

Mais, en un point quelconque on a (94) :

$$p = \frac{\sin(\Theta - \tau)}{\cos\tau}$$

En portant cette valeur dans l'équation ci-dessus elle devient :

$$\operatorname{tg} 2(\Theta - \tau_m) = -2\operatorname{cotg}\Theta.$$

et elle donne pour τ_m deux valeurs qui diffèrent entre elles de $\frac{\pi}{2}$.

Donc on peut dire : *les tangentes aux deux points de vitesse minimum situés l'un sur la trajectoire avec sommet, l'autre sur la trajectoire des bolides sont perpendiculaires.*

Soit ν_m la valeur de ν correspondant au point de vitesse minimum. On a (204)

$$p_m = \frac{2}{\sin\Theta - 3\mathcal{J}'\nu_m}$$

d'où
$$\mathcal{J}'^2\nu_m = \frac{p_m^2 - 4p_m\sin\Theta + 4}{9p_m^2}$$

ce qui en tenant compte de la relation

$$p_m^2 \cos^2 \Theta + p_m \sin \Theta - 1 = 0$$

devient : $$\wp'^2 v_m = \frac{4 - 3 \sin^2 \Theta}{g}$$

Mais d'après la définition de g_3 (204) : $g_3 = \dfrac{4 - 3 \sin^2 \Theta}{27}$

il vient $$\wp'^2 v_m = 3 g_3.$$

Mais (205) $$\wp' v = \sqrt{4 \wp^3 v - g_3}$$

il viendra donc $$4 \wp^3 v_m - g_3 = 3 g_3,$$

d'où $$\wp^3 v_m = g_3.$$

Cette formule fait connaître au moyen de la table de la fonction $\wp v$ la valeur de l'abscisse du point de vitesse minimum.

Si on désigne par $2\omega_1$ la période réelle de la fonction $\wp v$, on démontre qu'on a : $v_m = \frac{2}{3} \omega_1.$

On démontre en outre que les éléments y_m et t_m du point de vitesse minimum s'expriment par des fonctions *pseudo-elliptiques*, c'est-à-dire où n'entrent que des lignes trigonométriques et des logarithmes.

§ 4. — Sur les solutions par approximation du problème balistique

209. **Méthodes principales d'approximation.** — Nous avons dit précédemment (187) que la recherche d'une solution approchée du problème balistique dans le cas d'une résistance monôme et pour les valeurs de $n = 2$ et $n = 4$, où l'intégration directe est impossible, avait

beaucoup occupé les géomètres. Leurs recherches, qui souvent font appel à une analyse très ingénieuse, ne sauraient être exposées ici avec détails; on renverra le lecteur aux mémoires originaux où les calculs sont développés. Nous donnerons seulement l'indication d'une classification qui comprend les principes de beaucoup des méthodes d'approximation qui ont été proposées.

210. **Première méthode.** — Si on considère les équations du mouvement dans l'hypothèse d'une résistance monôme savoir :

$$\frac{g}{b_n}\frac{du}{u^{n+1}} = \frac{d\tau}{\cos^{n+1}\tau}, \qquad dx = -\frac{u^2}{g}\frac{d\tau}{\cos^2\tau},$$

$$dt = -\frac{u}{g}\frac{d\tau}{\cos^2\tau}, \qquad dy = -\frac{u^2}{g}\operatorname{tg}\tau\frac{d\tau}{\cos^2\tau},$$

il est évident que si la première équation où les variables sont séparées permettait d'obtenir $\operatorname{tg}\tau$ et $\frac{d\tau}{\cos^2\tau}$ en fonction de u, le problème tout entier sera résolu.

Le premier procédé d'approximation consistera donc à poser

$$\frac{g}{b_n}\frac{du}{u^{n+1}} = k\frac{d\tau}{\cos^2\tau}$$

k étant une constante.

Ce procédé pourra même être généralisé et s'appliquer au cas d'une fonction $F(v)$ quelconque; il jouit des propriétés suivantes :

1° Il est rigoureux dans le cas de $n = 1$; c'est le problème traité au paragraphe 2 du présent chapitre;

2° Il sera vrai à la limite, c'est-à-dire pour τ tendant vers zéro quel que soit n; car on a en première approximation (160) :

$$\xi_n(\tau) = \operatorname{tg}\tau + \cdots \qquad \text{d'où } \frac{d\tau}{\cos^{n+1}\tau} = \frac{d\tau}{\cos^2\tau} + \cdots$$

Cette dernière propriété le rend extrêmement précieux dans la pratique et son importance est considérable. Il est désigné souvent sous le nom de son premier vulgarisateur, le Gal Didion, quoi qu'il fût connu antérieurement déjà dans des cas particuliers[1] et quoi qu'il ait été depuis généralisé par de Saint-Robert et Siacci. Il fera l'objet du Livre IV du présent ouvrage sous le nom de « Tir de plein fouet ».

211. **Deuxième méthode**. — Outre le cas de $\xi_n(\tau) = \operatorname{tg}\tau$, on a vu qu'on avait réussi à intégrer les équations du mouvement pour une résistance cubique où l'intégrale $\xi_n(\tau) = \operatorname{tg}\tau + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\tau$ s'exprime ainsi également par des tangentes. Mais les cas de n pair qui introduisent dans l'expression de $\xi_n(\tau)$ la fonction $\operatorname{Log}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2}\right)$ ne laissent pas l'espoir de tirer de l'équation de l'hodographe la valeur de $\operatorname{tg}\tau$ ou de u qui permettrait l'intégration des autres équations différentielles.

Il devient alors naturel d'essayer de représenter la fonction $\xi_n(\tau)$, dans le cas de n pair, par une fonction en $\operatorname{tg}\tau$, telle que $\xi_n(\tau) = a_1 \operatorname{tg}\tau + a_3 \operatorname{tg}^3\tau$, et de chercher à intégrer les équations différentielles dans cette hypothèse.

On pourra tout d'abord prendre les deux premiers termes (160) du développement de $\xi_n(\tau) = \operatorname{tg}\tau + \frac{n-1}{2}\,\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\tau$ comme valeur approchée de $\xi_n(\tau)$. Mais si on considère le problème sous ce point de vue, c'est-à-dire comme dépendant d'un développement en série de $\xi_n(\tau)$, on est conduit logiquement à effectuer l'intégration par approximations successives : on devra donc calculer le premier terme de la série en supposant d'abord $\xi_n(\tau) = \operatorname{tg}\tau$, puis le second à l'aide du premier. On est ainsi conduit au problème traité dans sa généralité dans la théorie du *Tir de plein fouet*, lorsqu'on prend les deux premiers termes de la série.

[1] Méthodes de Borda, Bezout, etc. Voir le *Traité Balistique de Didion*, p. 243.

Donc, pour obtenir des procédés nouveaux d'approximation, il faudra supposer que dans la formule

$$\xi_n(\tau) = a_1 \operatorname{tg} \tau + a_3 \operatorname{tg}^3 \tau,$$

les coefficients a_1 et a_3 soient déterminés de manière à ce que la formule binôme donne en deux points (ou un point et une tangente), différents de l'origine commune, les mêmes valeurs que la fonction $\xi_n(\tau)$. Les valeurs de a_1 et a_3 pourront donc varier suivant l'amplitude (α, ω, ω) de la trajectoire étudiée. Comme les deux fonctions sont impaires, il y aura cinq points communs aux deux fonctions entre l'origine et le point de chute. On peut donc espérer une grande approximation par l'emploi de cette méthode dans les cas malheureusement très peu nombreux où elle pourra être logiquement utilisée.

Exemples d'application de cette méthode.

a) *Cas de $n = 2$:*

1° Legendre[1] $\xi_2(\tau) = a_1 \operatorname{tg} \tau + a_3 \operatorname{tg}^3 \tau$

2° M. de Sparre[2] $\xi_2(\tau) = a_1 \operatorname{tg} \tau + a_3 \operatorname{tg}^3 \tau$

3° Examiner le cas limite $\xi_2(\tau) = a_3 \operatorname{tg}^3 \tau$

b) *Cas de $n = 4$:*

1° M. Zabouski[3] $\xi_4(\tau) = a_1 \operatorname{tg} \tau + a_3 \operatorname{tg}^3 \tau$

2° M. de Sparre[4] $\xi_4(\tau) = a_1 \operatorname{tg} \tau + a_3 \operatorname{tg}^3 \tau$

3° Examiner le cas limite $\xi_4(\tau) = a_3 \operatorname{tg}^3 \tau$.

212. Exercices sur diverses autres méthodes

[1] *Traité de Balistique de Didion*, p. 245.

[2] *Mémorial de l'Artillerie de la Marine*, t. XXI, 1893, p. 200.

[3] *Revue d'Artillerie*, août 1889.

[4] *Mémorial de l'Artillerie de la Marine*, t. XXVII, 1899, p. 817.

d'approximation. — 1° *Cas de* $n = 2$: Remplacer $\frac{d\tau}{\cos^3\tau}$ dans l'équation de l'hodographe par

$$\frac{1 + a \operatorname{tg}^2\tau}{\sqrt{1 + \frac{a}{2} \operatorname{tg}^2\tau}} \frac{d\tau}{\cos^2\tau},$$

et intégrer u, x et y[1].

2° *Cas de* $n = 2$: Pour τ variant de $\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{4}$ ou de $-\frac{\pi}{4}$ à $-\frac{\pi}{2}$ prendre :

$$\xi_2(\tau) \cos^2\tau = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} \sin 2\tau$$

ou même $$\xi_2(\tau) \cos^2\tau = \text{const.}$$ [2]

3° *Cas de* $n = 4$: Pour les mêmes régions de variation de τ prendre :

$$\xi_4(\tau) = \frac{1}{4} [\operatorname{tg}^4\tau + 4\beta \operatorname{tg}^2\tau + \gamma]$$ [3].

4° *Cas de* $n = 4$: On a (97)

$$\frac{d^3y}{dx^3} = - \frac{2g}{v^4 \cos^3\tau} cF(v)$$

qui dans le cas de $cF(v) = b_4 v^4$ devient :

$$\frac{d^3y}{dx^3} = - \frac{2gb_4}{\cos^3\tau}$$

On posera $\frac{1}{\cos^3\tau} = m - m'y$ et on obtiendra l'équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$\frac{d^3y}{dx^3} + m'y - m = 0$$

On l'intègre et on trouve l'équation de la trajectoire, puis l'expression de $\operatorname{tg}\tau$ et de u[4].

[1] Français, *Traité de Balistique de Didion*, p. 247.
[2] M. de Sparre, *Mémorial de l'Artillerie de la Marine*, t. XXII, p. 829.
[3] M. de Sparre, *loc. cit.*
[4] M. de Sparre, *Mémorial de l'Artillerie de la Marine*, t. XX, 1892, p. 619.

LIVRE IV

LE TIR DE PLEIN FOUET

CHAPITRE IX

LES FORMULES DU TIR DE PLEIN FOUET

§ 1. — Le premier terme de la série

213. **Définition du tir de plein fouet.** — Le *Tir de plein fouet* correspond à un cas particulier du problème défini au nº 151 où le développement en série prend comme point de départ le développement trigonométrique de la fonction cosinus qui figure dans l'hodographe. Le *Tir de plein fouet* envisage spécialement une trajectoire tout entière, de α, angle de projection, à ω angle de chute, mais située dans le voisinage du sommet de la trajectoire totale. Ces trajectoires sont celles que, dans la pratique, l'Artillerie a le plus souvent à considérer.

Analytiquement, le tir de plein fouet sera caractérisé par le fait que de l'origine au point de chute, les inclinaisons τ de la tangente à la trajectoire sur l'horizontale resteront toujours petites. Aucune hypothèse n'est faite sur la grandeur relative des deux forces qui agissent sur

le projectile, savoir la gravité g et la résistance de l'air $cF(v)$, sinon que le rapport $\frac{cF}{g}$ n'est ni un nombre très grand, ni un nombre très petit.

Le point de départ des calculs sera le développement trigonométrique du cosinus qui est

$$\cos\tau = 1 - \frac{\tau^2}{1.2} + \frac{\tau^4}{1.2.3.4} + \cdots$$

Comme ce développement saute un terme sur deux en τ, il en résulte une convergence rapide de ces séries, pour τ voisin de zéro, et c'est cette propriété qui, transportée par le calcul dans les équations du mouvement, rendra possible l'obtention de formules de tir particulièrement approchées.

Comme on a : $$\operatorname{tg}\tau = \tau + \frac{\tau^3}{1.3} + \frac{2\tau^5}{1.3.5} + \cdots$$

on pourra exprimer, si on veut, $\cos\tau$ en fonction de $\operatorname{tg}\tau$ comme il suit :

$$\cos\tau = 1 - \frac{\operatorname{tg}^2\tau}{1.2} + \frac{9}{1.2.3.4}\operatorname{tg}\tau^4 + \cdots$$

Rappelons les équations différentielles du mouvement sous la forme du n° 88, II, où la variable est la vitesse horizontale u.

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{c}{g}vF(v), \qquad dx = -\frac{u^2}{g}\frac{d\tau}{\cos^2\tau},$$

$$dt = -\frac{u}{g}\frac{d\tau}{\cos^2\tau}, \qquad dy = -\frac{u^2}{g}\operatorname{tg}\tau\frac{d\tau}{\cos^2\tau}.$$

La première équation différentielle est celle de l'*ho-*

dographe, dont il est nécessaire tout d'abord de savoir obtenir l'intégrale.

214. Développement de l'hodographe. — Posons

$$\Phi(v) = \frac{1}{v\mathrm{F}(v)}$$

et écrivons l'hodographe sous la forme identique

$$\frac{d\tau}{\cos^2\tau} = \frac{g}{c}\,\Phi\left(\frac{u}{\cos\tau}\right)\frac{du}{\cos^2\tau}.$$

Introduisons maintenant dans les deux membres de cette équation le développement de la fonction cosinus, réduite à ses trois premiers termes. On calculera d'abord

$$\frac{1}{\cos\tau} = 1 + \frac{\tau^2}{1.2} + \frac{5\tau^4}{1.2.3.4} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\cos^2\tau} = 1 + \frac{\tau^2}{1} + \frac{2\tau^4}{1.3}.$$

On aura ainsi :

$$\frac{d\tau}{\cos^2\tau} = \frac{g}{c}\left(1 + \frac{\tau^2}{1} + \frac{2\tau^4}{1.3} + \dots\right)\Phi\left(u + \frac{u\tau^2}{1.2} + \frac{5u\tau^4}{1.2.3.4} + \dots\right)du.$$

Développons alors la fonction Φ par la formule de Taylor bornée aux termes en τ^4 ; en sous-entendant la variable u, on aura :

$$\Phi\left(u + \frac{u\tau^2}{1.2} + \frac{5u\tau^4}{1.2.3.4} + \dots\right) = \Phi + \frac{u\tau^2}{1.2}\Phi' + \frac{u\tau^4}{1.2.3.4}(3u\Phi'' + 5\Phi') + \dots$$

On obtiendra alors, pour le développement de l'équation différentielle de l'hodographe, la formule suivante :

$$\frac{d\tau}{\cos^2\tau} = \frac{g}{c}\left[\Phi + \left(\Phi + \frac{u}{2}\Phi'\right)\tau^2 + \left(\frac{2}{3}\Phi + \frac{17}{24}u\Phi' + \frac{u^2}{8}\Phi''\right)\tau^4 + \dots\right]du.$$

Telle est l'équation différentielle qui donne, dans le second membre, la série ordonnée suivant les puissances de τ. Dans le premier membre se trouve la dérivée de $\operatorname{tg}\tau$. On voit que le développement du second membre saute un terme en τ sur deux, exactement comme la série qui donne $\operatorname{tg}\tau$.

215. **Intégration du premier terme de l'hodographe.** — Afin d'obtenir le premier terme de la série, nous négligerons dans le second membre de l'équation ci-dessus, les termes en $\tau^2\,du$ et en $\tau^4\,du$, c'est-à-dire de l'ordre de τ^3 et τ^5.

En rétablissant la fonction F, il viendra

$$\frac{d\tau}{\cos^2\tau} = \frac{g}{c}\,\frac{du}{u\mathrm{F}(u)}.$$

Intégrons cette équation depuis la limite supérieure (τ, u) jusqu'à la limite inférieure (α, u_0), bouche du canon et origine de la trajectoire.

On obtiendra :

$$\operatorname{tg}\tau = \operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{c}\int_{u_0}^{u} g\,\frac{du}{u\mathrm{F}}.$$

Posons comme définition de l'intégrale qui figure dans le second membre, et qui a déjà été rencontrée (118) :

$$\mathbf{J}(u) = -\int_{\mathrm{U}}^{u} g\,\frac{du}{u\mathrm{F}(u)}$$

(U étant une vitesse arbitraire quelconque) et supposons que des tables numériques de la fonction $\mathbf{J}(u)$ aient été calculées une fois pour toutes, au moyen de la fonction $\mathrm{F}(v)$ expérimentale.

L'équation intégrée de l'hodographe sera donc :

$$\operatorname{tg} \tau = \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{c} [\mathbf{J}(u_0) - \mathbf{J}(u)]$$

ou, suivant une notation abrégée, en sous-entendant la variable u :

$$\operatorname{tg} \tau = \operatorname{tg} \alpha + \frac{\mathbf{J}_0 - \mathbf{J}}{c}.$$

On peut écrire encore :

$$\operatorname{tg} \tau + \frac{\mathbf{J}}{c} = \operatorname{tg} \alpha + \frac{\mathbf{J}_0}{c} = q.$$

En chaque point de la trajectoire, la somme $\left(\operatorname{tg} \tau + \frac{\mathbf{J}}{c}\right)$ *est ainsi une quantité constante.*

216. **Temps.** — La solution du problème va se poursuivre maintenant sans difficulté pour tous les autres éléments du mouvement.

Pour avoir le *temps*, dans l'équation différentielle

$$dt = -\frac{u}{g} \frac{d\tau}{\cos^2 \tau},$$

on remplacera $\frac{d\tau}{\cos^2 \tau}$ par sa valeur principale $\frac{g}{c} \frac{du}{u\mathrm{F}}$. Il viendra

$$dt = -\frac{1}{c} \frac{du}{\mathrm{F}(u)}.$$

Intégrant, en supposant que $t = 0$ à l'origine (α, u_0), on aura :

$$t = -\frac{1}{c} \int_{u_0}^{u} \frac{du}{\mathrm{F}(u)}.$$

Soit, par définition, la fonction $\mathbf{S}(u)$ déjà rencontrée (48) telle que :

$$\mathbf{S}(u) = -\int_{U}^{u} \frac{du}{F(u)}$$

(U étant une vitesse arbitraire). On aura :

$$t = \frac{\mathbf{S}(u) - \mathbf{S}(u_0)}{c}$$

ou, en employant une notation abrégée :

$$t = \frac{\mathbf{S} - \mathbf{S}_0}{c}.$$

Si, à l'origine, le temps eût été pris égal à t_0, le théorème analogue à celui qui existe pour les inclinaisons serait *qu'en un point de la trajectoire, la quantité*

$$t - \frac{\mathbf{S}}{c} = t_0 - \frac{\mathbf{S}_0}{c}$$

est une constante.

217. **Abscisse.** — Les calculs, pour l'abscisse, sont tout à fait analogues aux précédents, en partant de l'équation

$$dx = -\frac{u^2}{g}\frac{d\tau}{\cos^2\tau}$$

qui se transforme en

$$dx = -\frac{1}{c}\frac{udu}{F(u)}.$$

L'intégration de x à zéro et de u à u_0 introduira la fonction $\mathbf{D}(u)$ déjà connue (48) sous la définition

$$\mathbf{D}(u) = -\int_{U}^{u} \frac{udu}{F(u)}$$

(U étant une vitesse arbitraire). On aura ainsi la formule

$$x = \frac{\mathbf{D} - \mathbf{D}_0}{c}$$

et le *théorème de la constance en tous points de la trajectoire de la quantité*

$$x - \frac{\mathbf{D}}{c} = x_0 - \frac{\mathbf{D}_0}{c}.$$

218. **Ordonnée**. — Dans l'équation différentielle

$$dy = -\frac{u^2}{g} \operatorname{tg} \tau \frac{d\tau}{\cos^2 \tau},$$

remplaçons $\operatorname{tg} \tau$ par sa valeur principale (215)

$$\operatorname{tg} \tau = q - \frac{\mathbf{J}}{c},$$

et $\frac{d\tau}{\cos^2 \tau}$ par sa valeur principale : $\frac{d\tau}{\cos^2 \tau} = \frac{g}{c} \frac{du}{u\mathrm{F}}$.

Il viendra : $dy = -\frac{1}{c}\left(q - \frac{\mathbf{J}}{c}\right) \frac{udu}{\mathrm{F}}$,

ou bien :

$$dy = -\frac{q}{c} \frac{udu}{\mathrm{F}} + \frac{1}{c^2} \mathbf{J} \frac{udu}{\mathrm{F}}.$$

Intégrant, avec l'hypothèse $y = 0$ pour $u = u_0$, on aura :

$$y = -\frac{q}{c} \int_{u_0}^{u} \frac{udu}{\mathrm{F}} + \frac{1}{c^2} \int_{u_0}^{u} \mathbf{J} \frac{udu}{\mathrm{F}}.$$

Soit une fonction $\mathbf{A}(u)$ (119) répondant à la définition :

$$\mathbf{A}(u) = -\int_{\mathrm{U}}^{u} \mathbf{J} \frac{udu}{\mathrm{F}}.$$

et dont la table pourra être calculée une fois pour toutes. Il viendra :

$$y = q\,\frac{\mathbf{D}-\mathbf{D}_0}{c} - \frac{1}{c^2}(\mathbf{A}-\mathbf{A}_0).$$

C'est la valeur de l'*ordonnée* y en fonction de la vitesse horizontale u et des données à l'origine. Le théorème sur l'invariant en un point de la trajectoire est *que la quantité*

$$y - q\,\frac{\mathbf{D}}{c} + \frac{\mathbf{A}}{c^2} = y_0 - q\,\frac{\mathbf{D}_0}{c} + \frac{\mathbf{A}_0}{c^2}$$

reste constante en tout point de la trajectoire.

Si dans la formule qui donne y, on remplace q par sa valeur $\left(\operatorname{tg}\alpha + \frac{\mathbf{J}_0}{c}\right)$ et si on remarque que $\frac{\mathbf{D}-\mathbf{D}_0}{c} = x$, on pourra écrire :

$$y = x\operatorname{tg}\alpha - \frac{1}{c^2}[\mathbf{A}-\mathbf{A}_0-\mathbf{J}_0(\mathbf{D}-\mathbf{D}_0)]$$

Cette équation met en évidence l'*abaissement* (21)

$$\mathrm{H} = \frac{1}{c^2}[\mathbf{A}-\mathbf{A}_0-\mathbf{J}_0(\mathbf{D}-\mathrm{D}_0)].$$

219. **Tableau des formules pour un point quelconque.** — D'après ce qui vient d'être établi, les formules du *Tir de plein fouet*, premier terme de la série, sont les suivantes pour un point quelconque (v,τ) de la trajectoire :

$$\operatorname{tg}\tau = q - \frac{\mathbf{J}}{c}, \qquad x = \frac{\mathbf{D}-\mathbf{D}_0}{c},$$

$$t = \frac{\mathbf{S}-\mathbf{S}_0}{c}, \qquad y = q\,\frac{\mathbf{D}-\mathbf{D}_0}{c} - \frac{1}{c^2}(\mathbf{A}-\mathbf{A}_0).$$

La variable indépendante dans les fonctions **J**, **S**, **D** et **A** est la vitesse horizontale $u = v \cos \tau$.

La constante q est telle que :

$$q = \operatorname{tg} \alpha + \frac{\mathbf{J}_0}{c}.$$

Les quatre fonctions de u qui figurent dans les seconds membres des équations sont les *fonctions balistiques de Siacci*. Elles ont pour définitions :

$$\mathbf{J} = -\int_{U}^{u} g \frac{du}{u\mathrm{F}}, \qquad \mathbf{D} = -\int_{U}^{u} \frac{u\,du}{\mathrm{F}},$$

$$\mathbf{S} = -\int_{U}^{u} \frac{du}{\mathrm{F}}, \qquad \mathbf{A} = -\int_{U}^{u} \mathbf{J} \frac{u\,du}{\mathrm{F}}.$$

F est la fonction $\mathrm{F}(v)$ expérimentale.

U est une vitesse arbitraire quelconque.

On a les relations différentielles de définition :

$$\frac{d\mathbf{J}}{du} = -\frac{g}{u\mathrm{F}}, \qquad \frac{d\mathbf{D}}{du} = \frac{u}{\mathrm{F}},$$

$$\frac{d\mathbf{S}}{du} = -\frac{1}{\mathrm{F}}, \qquad \frac{d\mathbf{A}}{du} = -\mathbf{J}\frac{u}{\mathrm{F}}.$$

220. **Sommet de la trajectoire**. — Faisant dans la première équation du n° précédent $\operatorname{tg} \tau = 0$ on aura :

$$qc = \mathbf{J}_s,$$

relation qui fera connaître, au moyen de la table de la fonction **J**, la vitesse au sommet u_s. En portant u_s dans les autres fonctions balistiques **S**, **D** et **A**,

on aura les équations du sommet sous la forme :

$\mathbf{J}_s = qc$ d'où u_s *vitesse* au sommet

$$X_s = \frac{\mathbf{D}_s - \mathbf{D}_0}{c}$$ X_s *abscisse* du point culminant.

$$T_s = \frac{\mathbf{S}_s - \mathbf{S}_0}{c}$$ T_s *durée* de trajet correspondant.

$$Y_s = \frac{1}{c^2}\left[\mathbf{J}_s(\mathbf{D}_s - \mathbf{D}_0) - (\mathbf{A}_s - \mathbf{A}_0)\right]$$

Y_s *flèche* de la trajectoire.

221. **Point de chute.** — Le point de chute sur un sol horizontal étant défini par la condition $y = 0$, on obtiendra u_ω en égalant à zéro le second membre de l'équation qui donne y (219).

En portant cette valeur de u_ω dans les autres fonctions balistiques, **S**, **D** et **J**, on pourra, à l'aide des tables de ces fonctions, déterminer les valeurs des différents éléments de la trajectoire au point de chute.

On trouve ainsi :

$$\frac{\mathbf{A}_\omega - \mathbf{A}_0}{\mathbf{D}_\omega - \mathbf{D}_0} = qc$$ d'où u_ω *vitesse* restante horizontale.

$$X = \frac{\mathbf{D}_\omega - \mathbf{D}_0}{c}$$ X *portée*.

$$T = \frac{\mathbf{S}_\omega - \mathbf{S}_0}{c}$$ T *durée* du trajet.

$$\operatorname{tg}\omega = q - \frac{\mathbf{J}_\omega}{c}$$ ω *angle* de chute.

On peut mettre la première et la dernière de ces

équations sous des formes symétriques qu'il peut être utile de connaître. Remplaçant dans la première q par sa valeur $\left(\operatorname{tg}\alpha + \frac{\mathbf{J}_0}{c}\right)$ et dans la dernière qc par $\frac{\mathbf{A}_\omega - \mathbf{A}_0}{\mathbf{D}_\omega - \mathbf{D}_0}$, il vient :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{c}\left[\frac{\mathbf{A}_\omega - \mathbf{A}_0}{\mathbf{D}_\omega - \mathbf{D}_0} - \mathbf{J}_0\right]$$

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{1}{c}\left[\frac{\mathbf{A}_\omega - \mathbf{A}_0}{\mathbf{D}_\omega - \mathbf{D}_0} - \mathbf{J}_\omega\right].$$

222. **Exercices.** — 1° Former les dérivées successives des fonctions balistiques relativement à la variable u.

On trouve :

$$\frac{d\mathbf{J}}{du} = -\frac{g}{u\mathrm{F}} \qquad \frac{d\mathbf{D}}{du} = -\frac{u}{\mathrm{F}}$$

$$\frac{d^2\mathbf{J}}{du^2} = \frac{g}{u^2\mathrm{F}^2}(u\mathrm{F}' + \mathrm{F}) \qquad \frac{d^2\mathbf{D}}{du^2} = \frac{1}{\mathrm{F}^2}(u\mathrm{F}' - \mathrm{F})$$

$$\frac{d^3\mathbf{J}}{du^3} = \frac{g}{u^3\mathrm{F}^3}\left[\begin{matrix} u^2\mathrm{F}\mathrm{F}'' - 2u^2\mathrm{F}'^2 \\ -2u\mathrm{F}\mathrm{F}' - 2\mathrm{F}^2 \end{matrix}\right] \qquad \frac{d^3\mathbf{D}}{du^3} = \frac{1}{\mathrm{F}^3}\left[\begin{matrix} u\mathrm{F}\mathrm{F}'' - 2u\mathrm{F}'^2 \\ +2\mathrm{F}\mathrm{F}' \end{matrix}\right]$$

$$\frac{d\mathbf{S}}{du} = -\frac{1}{\mathrm{F}} \qquad \frac{d\mathbf{A}}{du} = -\frac{\mathbf{J}}{u\mathrm{F}}$$

$$\frac{d^2\mathbf{S}}{du^2} = \frac{\mathrm{F}'}{\mathrm{F}^2} \qquad \frac{d^2\mathbf{A}}{du^2} = \frac{1}{\mathrm{F}^2}(g + \mathbf{J}u\mathrm{F}' - \mathbf{J}\mathrm{F})$$

$$\frac{d^3\mathbf{S}}{du^3} = \frac{1}{\mathrm{F}^3}(\mathrm{F}\mathrm{F}'' - 2\mathrm{F}'^2) \qquad \frac{d^3\mathbf{A}}{du^3} = \frac{1}{\mathrm{F}^3}\left[\begin{matrix} \mathbf{J}(u\mathrm{F}\mathrm{F}'' - 2u\mathrm{F}'^2 + 2\mathrm{F}\mathrm{F}') \\ -\frac{g}{u}(3u\mathrm{F}' - \mathrm{F}). \end{matrix}\right]$$

2° Former les dérivées successives des fonctions balistiques par rapport à l'une quelconque d'entre elles, par exemple **D**.

		$\mathbf{J} = \qquad = \frac{d\mathbf{A}}{d\mathbf{D}}$
$\frac{du}{d\mathbf{D}} = -\frac{F}{u}$	$\frac{d\mathbf{S}}{d\mathbf{D}} = \frac{1}{u}$	$\frac{d\mathbf{J}}{d\mathbf{D}} = \frac{g}{u^2} = \frac{d^2\mathbf{A}}{d\mathbf{D}^2}$
$\frac{d^2u}{d\mathbf{D}^2} = \frac{F}{u^3}(uF' - F)$	$\frac{d^2\mathbf{S}}{d\mathbf{D}^2} = \frac{F}{u^3}$	$\frac{d^2\mathbf{J}}{d\mathbf{D}^2} = 2g\frac{F}{u^4} = \frac{d^3\mathbf{A}}{d\mathbf{D}^3}$
$\frac{d^3u}{d\mathbf{D}^3} = \frac{F}{u^5}\begin{bmatrix} 4uFF' \\ -3F^2 - u^2F'^2 \\ -u^2FF'' \end{bmatrix}$	$\frac{d^3\mathbf{S}}{d\mathbf{D}^3} = \frac{F}{u^5}(3F - uF')$	$\frac{d^3\mathbf{J}}{d\mathbf{D}^3} = 2g\frac{F}{u^6}(4F - uF') = \frac{d^4\mathbf{A}}{d\mathbf{D}^4}$

3° Démontrer que les formules de la fin du n° 221 qui donnent tg α et tg ω sont des cas particuliers des deux suivantes :

$$c\left(\operatorname{tg}\alpha - \frac{y}{x}\right) = \frac{\mathbf{A} - \mathbf{A}_0}{\mathbf{D} - \mathbf{D}_0} - \mathbf{J}_0$$

$$c\left(\operatorname{tg}\tau - \frac{y}{x}\right) = \frac{\mathbf{A} - \mathbf{A}_0}{\mathbf{D} - \mathbf{D}_0} - \mathbf{J}$$

formules qu'on déduit des équations en un point quelconque (219).

4° Partant de l'équation qui donne

$$y = q\,\frac{\mathbf{D} - \mathbf{D}_0}{c} - \frac{1}{c^2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}_0),$$

former $\frac{dy}{dx}$ ou $\frac{dy}{d\mathbf{D}}$ et retrouver l'équation qui donne

$$\operatorname{tg}\tau = q - \frac{\mathbf{J}}{c}.$$

5° Montrer que pour $u = u_0$, on a lim $\frac{\mathbf{A} - \mathbf{A}_0}{\mathbf{D} - \mathbf{D}_0} = \mathbf{J}_0$.

§ 2. — Résolution des problèmes de tir

223. Considérations générales. — Les équations du n° 219 font connaître, pour un point quelconque

de la trajectoire, quatre relations entre huit variables u_0, α, c d'une part, à l'origine de l'arc, u, τ, x, y, t, d'autre part, à l'autre extrémité. Il suffit donc de connaître quatre quelconques de ces variables, à condition que l'une d'elles au moins soit une des trois quantités u_0, α, c, pour que le problème soit analytiquement déterminé et que le calcul des quatre autres variables soit possible.

Mais, pratiquement, les différents problèmes auxquels on sera conduit, seront de nature diverse et ils offriront des difficultés plus ou moins grandes suivant la manière dont les inconnues sont engagées dans les équations.

Dans certains cas, la solution pourra être tout à fait immédiate ; dans d'autres, elle exigera des tâtonnements et des approximations successives.

Nous allons donner quelques exemples des différents problèmes de tir en nous limitant à ceux qui peuvent présenter un réel intérêt pratique parmi tous les cas possibles.

Ceux-ci sont au nombre de 65. — Car, abstraction faite de la restriction concernant la nécessité de connaître une des données à l'origine, on aurait à calculer le nombre de combinaisons de 8 objets 4 à 4, qui est

$$C_p^m = \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{p!} \quad (m = 8,\ p = 4).$$

On trouve ainsi 70 dont il y a à retrancher 5 combinaisons formées avec 4 des variables de l'extrémité de l'arc.

224. **Cas où u_0 et u sont donnés**. — Écrivons les

équations du n° 219 en mettant en évidence les fonctions balistiques.

$$(1) \qquad c(\operatorname{tg}\tau - \operatorname{tg}\alpha) = \mathbf{J}_0 - \mathbf{J}$$

$$(2) \qquad ct = \mathbf{S} - \mathbf{S}_0$$

$$(3) \qquad cx = \mathbf{D} - \mathbf{D}_0$$

$$(4) \qquad c^2(x \operatorname{tg}\alpha - y) = \mathbf{A} - \mathbf{A}_0 - \mathbf{J}_0(\mathbf{D} - \mathbf{D}_0).$$

Quand on se donne u_0 et u, les seconds membres de ces quatre équations sont déterminés. Lorsqu'en outre on connaîtra deux des variables des premiers membres (à condition que ce ne soit pas c et x ou c et t ou x et t) les autres inconnues seront faciles à déterminer.

1° Si c est une des données, x et t sont déterminés immédiatement par les équations (2) et (3). L'autre donnée sera donc :

ou y et l'équation (4) fera connaître α et l'équation (1) τ;
ou α et l'équation (4) détermine y et l'équation (1) τ;
ou τ et l'équation (1) donne α et l'équation (4) y.

2° Si c n'est pas une des données du problème, il reste dix combinaisons possibles dont l'une (x et t donnés) ne suffit pas pour déterminer le problème. Toutes ces hypothèses conduisent à résoudre des problèmes du premier degré, à l'exception des données α et y ou τ et y qui conduisent pour déterminer c à des équations du second degré :

$$yc^2 + c \operatorname{tg}\alpha(\mathbf{D}_0 - \mathbf{D}) + \mathbf{A} - \mathbf{A}_0 - \mathbf{J}_0(\mathbf{D} - \mathbf{D}_0) = 0$$

$$yc^2 + c \operatorname{tg}\tau(\mathbf{D}_0 - \mathbf{D}) + \mathbf{A} - \mathbf{A}_0 - \mathbf{J}(\mathbf{D} - \mathbf{D}_0) = 0.$$

225. **Cas où u, α et c sont donnés.** — Dans le cas où on connaît les trois données à l'origine de la trajectoire, la solution des problèmes de tir est très simple lorsqu'on définit l'autre extrémité de l'arc par une des quantités u, τ, x ou t et qu'on se propose de calculer les trois autres.

Cette facilité des calculs tient à la façon simple dont sont engagées les variables dans les équations du *Tir de plein fouet* et qui est telle que la connaissance des fonctions balistiques du point cherché s'obtient par de simples additions ou soustractions.

1° *Premier problème. — Trouver les éléments du point dont l'inclinaison sur la branche descendante est α.*

Dans l'équation (1) (224) faisons $\operatorname{tg}\tau = -\operatorname{tg}\alpha$; il viendra

$$\mathbf{J}_{-\alpha} = \mathbf{J}_0 + 2c \operatorname{tg}\alpha,$$

relation qui fera connaître $\mathbf{J}_{-\alpha}$ et par suite, au moyen de la table balistique, $u_{-\alpha}$, $\mathbf{D}_{-\alpha}$, $\mathbf{S}_{-\alpha}$ et $\mathbf{A}_{-\alpha}$.

2° *Deuxième problème. — Trouver les éléments du sommet.*

Dans l'équation (1) (224) faisons $\operatorname{tg}\tau = 0$; on aura

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{J}_0 + c \operatorname{tg}\alpha,$$

d'où on déduira u_s et les autres fonctions balistiques. Les formules du n° 9 permettront alors le calcul numérique des autres éléments.

226. **Cas de résolution par approximation.** — Un second groupe de problèmes correspond au cas où

les inconnues se trouvent engagées sous une forme complexe dans les fonctions balistiques. Il faudra alors opérer par approximation, en partant d'une valeur approchée de l'inconnue, obtenue soit par un calcul préliminaire, soit par tout autre procédé. Du choix plus ou moins judicieux de cette valeur approchée dépend la longueur des calculs nécessaires : dans certains cas, un développement approprié par la série de Taylor donnera la différence entre la valeur approchée et la valeur véritable ; dans d'autres cas, des tâtonnements plus nombreux seront nécessaires.

Nous allons donner quelques exemples de problèmes usuels.

227. **Troisième problème**. — *Trouver l'angle de projection* α, *étant donnés* V_0, *c et la portée* X.

Ce problème se présentera fréquemment dans les polygones d'expériences, quand on se proposera, avec un canon déterminé (V_0 et c étant par suite connus) d'atteindre une portée X, pour toucher, par exemple, des panneaux qui auraient été placés dans le voisinage de ce point. L'inconnue est alors l'angle de projection α.

Or, à cause de la façon dont α se trouve engagé dans les équations du n° 224, où il figure dans la quantité q et aussi dans la constante u_0 des fonctions balistiques, de simples opérations d'addition ou de soustraction ne suffiront plus pour résoudre le problème et on est forcé d'opérer par quelque méthode d'approximation.

La plus simple consistera évidemment ici à faire abstraction tout d'abord du cosinus dans les fonctions

balistiques et à écrire, en négligeant ainsi un terme du *second ordre* en τ :

$$cX = \mathbf{D}(\mu) - \mathbf{D}(V_0)$$

au lieu de

$$cX = \mathbf{D}(u_\omega) - \mathbf{D}(u_0)$$

μ est une valeur approchée de u_ω.

1° Ayant déterminé μ par l'équation immédiatement soluble

$$\mathbf{D}(\mu) = cX + \mathbf{D}(V_0)$$

on obtiendra une *valeur approchée* α_1 de l'inconnue α en employant la formule du n° 221 :

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{1}{c} \left[\frac{\mathbf{A}(\mu) - \mathbf{A}(V_0)}{\mathbf{D}(\mu) - \mathbf{D}(V_0)} - \mathbf{J}(V_0) \right]$$

où, dans le deuxième membre, tout est connu.

2° Pour passer de α_1 à α, posons $\mu = u_\omega + \varepsilon$ et $\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}$. On a la relation rigoureuse :

$$0 = \mathbf{D}(u_\omega) - \mathbf{D}(\mu) - \mathbf{D}(V_0 \cos \alpha) + \mathbf{D}(V_0)$$

qui s'écrit

$$0 = \mathbf{D}(\mu - \varepsilon) - \mathbf{D}(\mu) - \mathbf{D}\left(V_0 - \frac{\alpha^2}{2} V_0\right) + \mathbf{D}(V_0).$$

Développons la fonction $\mathbf{D}$ par la formule de Taylor, bornée à deux termes, en remarquant que $\frac{d\mathbf{D}}{du} = -\frac{u}{F}$. Il viendra entre ε et α^2 la relation :

$$\varepsilon = \frac{\alpha^2}{2} \frac{V_0^2}{\mu} \frac{F_\mu}{F_0}.$$

3° Pour avoir une seconde relation entre α et ε, recourons à l'équation qui donne $\operatorname{tg} \alpha$ (221)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{c} \left[\frac{\mathbf{A}_\omega - \mathbf{A}_0}{\mathbf{D}_\omega - \mathbf{D}_0} - \mathbf{J}_0 \right]$$

où on remplacera u_ω par $(\mu - \varepsilon)$ et u_0 par $\left(V_0 - \frac{\alpha^2}{2} V_0\right)$.

Il viendra, en développant les trois fonctions **A, D, J** par la formule de Taylor et en éliminant ε dont on a calculé précédemment la valeur :

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha_1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha_1}{2} \frac{1}{cF_0} \left[\frac{V_0^2 (\mathbf{J}_\mu - \mathbf{J}_0)}{\mathbf{D} - \mathbf{D}_0} - g \right]$$

qui résout le problème.

4° Mais on devra vérifier que l'approximation est suffisante en s'assurant que les deux équations

$$c\mathrm{X} = \mathbf{D}_\omega - \mathbf{D}_0 \quad \text{et} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{c} \left[\frac{\mathbf{A}_\omega - \mathbf{A}_0}{\mathbf{D}_\omega - \mathbf{D}_0} - \mathbf{J}_0 \right]$$

sont bien satisfaites. Sinon, on devrait repartir de la valeur de α ainsi trouvée comme nouvelle approximation pour les mêmes calculs.

228. **Quatrième problème.** — *Déterminer l'indice caractéristique d'un projectile connaissant* V_0, α, *la portée* X *et la durée du trajet* T.

On suppose qu'on connaît une valeur approchée c' du coefficient balistique $c = c' + \partial c$. — Le problème a pour but de rechercher ∂c.

1° Les équations corrélatives auxquelles satisfont X et T sont :

$$(c' + \partial c)\, \mathrm{X} = \mathbf{D}(u_\omega) - \mathbf{D}(u_0)$$
$$(c' + \partial c)\, \mathrm{T} = \mathbf{S}(u_\omega) - \mathbf{S}(u_0).$$

Soit μ une valeur approchée de u_ω telle que l'on ait

$$\mathbf{D}(\mu) = \mathbf{D}_0 + c'X.$$

Cette équation fait, au moyen de la table balistique, connaître μ; on en déduit la valeur T' de T qu'on aurait obtenue si $\partial c = 0$.

On a $$c'T' = \mathbf{S}(\mu) - \mathbf{S}_0.$$

2° Mais on a

$$\frac{X}{T} = \frac{\mathbf{D}(u_\omega) - \mathbf{D}_0}{\mathbf{S}(u_\omega) - \mathbf{S}_0}.$$

Posons $u_\omega = \mu - \varepsilon$ et développons par la formule de Taylor, il vient :

$$\frac{X}{T} = \frac{\mathbf{D}(\mu) - \mathbf{D}_0}{\mathbf{S}(\mu) - \mathbf{S}_0} + \frac{\varepsilon}{Tc'F_\mu}\left(\mu - \frac{X}{T}\right).$$

3° D'autre part, on a

$$(c' + \partial c)\, X = \mathbf{D}(\mu - \varepsilon) - \mathbf{D}_0$$

d'où $X\partial c = \varepsilon \dfrac{\mu}{F_\mu}$ et par suite

$$\frac{X}{T} = \frac{\mathbf{D}(\mu) - \mathbf{D}_0}{\mathbf{S}(\mu) - \mathbf{S}_0} + \frac{X}{\mu T}\frac{\partial c}{c'}\left(\mu - \frac{X}{T}\right)$$

ou bien :

$$\frac{\partial c}{c'} = \frac{\mu}{\mu T - X}(T' - T).$$

C'est l'équation cherchée.

On doit remarquer que dans ce problème les données sont surabondantes ; en réalité, on ne s'est pas servi de

l'hypothèse que X et T correspondaient au point de chute ; le problème se résout de la même manière pour x et t correspondant à un point quelconque de la trajectoire.

229. **Exercices**. — 1° Etant donnés V_0, α et X et une valeur approchée de c, trouver le coefficient balistique exact ;

2° Etant donnés α, c et X et une valeur approchée de V_0, trouver la vitesse initiale exacte.

3° Etant donnés V_0, c et ω (angle de chute) et une valeur approchée de α, trouver cet angle.

§ 3. — Recherche du point de chute

230. **Équation du problème.** — Le problème de la recherche des éléments du point de chute d'une trajectoire, quand les données à l'origine V_0, α et c sont connues, est de tous le plus important, non seulement pour la préparation des tirs dans un polygone d'expériences, mais encore pour le calcul numérique des tables de tir.

En faisant $y = 0$ dans l'équation de la trajectoire, nous avons trouvé la relation (221) :

$$\frac{\mathbf{A}_\omega - \mathbf{A}_0}{\mathbf{D}_\omega - \mathbf{D}_0} = qc$$

où

$$q = \operatorname{tg} \alpha + \frac{\mathbf{J}_0}{c}.$$

Cette relation lie les constantes du problème à la vitesse horizontale u_ω au point de chute. A la vérité le

second membre de l'équation est une quantité connue ; mais dans le premier membre, l'inconnue se trouve engagée dans les fonctions $\mathbf{A}_\omega$ et $\mathbf{D}_\omega$.

Si on suppose u_ω déterminé par cette équation, les autres formules du n° 221 feront connaître par des opérations très simples, les éléments du point de chute, c'est-à-dire X, T et ω.

Pour résoudre l'équation qui donne u_ω, on peut employer deux méthodes, qui sont les suivantes :

231. **Fonction** $\dfrac{\mathbf{A}_\omega - \mathbf{A}_0}{\mathbf{D}_\omega - \mathbf{D}_0}$. — Une solution très évidente du problème consiste à dresser une fois pour toutes une table de la fonction $\dfrac{\mathbf{A}_\omega - \mathbf{A}_0}{\mathbf{D}_\omega - \mathbf{D}_0}$. Ce serait une table à double entrée, ayant pour arguments u_0 et u_ω et qui, à l'intersection de la ligne u_ω et de la colonne u_0, donnerait qc.

Si la table est suffisamment étendue pour que l'interpolation double y soit facile entre les valeurs successives de u_0 et de u_ω, cette solution serait évidemment très pratique. Mais, pour qu'il en soit réellement ainsi, une telle table devrait avoir une étendue très considérable si on veut éviter tout calcul ultérieur d'approximation.

232. **Méthode par approximation**. — On peut résoudre le problème de la recherche fondamentale de u_ω en employant une méthode par approximation analogue à celles déjà utilisées pour des questions antérieures.

Mais, pour qu'une telle méthode soit pratique, et ne conduise pas à des tâtonnements trop nombreux, il est

nécessaire d'opérer un choix judicieux de la valeur qu'on prendra comme initiale et qui doit être très approchée de l'inconnue u_ω. Si cette condition est réalisée, une formule simple, donnée par un développement de Taylor, permettra de passer de la valeur approchée à la véritable.

Une bonne valeur initiale sera évidemment donnée par une table de la fonction $\frac{\mathbf{A}_\omega - \mathbf{A}_0}{\mathbf{D}_\omega - \mathbf{D}_0}$ supposée trop sommaire pour qu'on puisse y faire une interpolation double bien précise. A défaut d'une telle table, on pourra employer le procédé suivant.

233. **Choix de la valeur approchée μ de u_ω.** — Prenons sur la trajectoire le *point* $(-\alpha)$ et le *point dont l'abscisse* est $2X_s$. On remarquera :

1° Que le calcul de la vitesse horizontale en ces points est immédiat et se fera par les formules très simples :

$$\mathbf{J}_{-\alpha} = 2\mathbf{J}_s - \mathbf{J}_0 \quad \text{pour le premier point}$$
$$\mathbf{D}_{2s} = 2\mathbf{D}_s - \mathbf{D}_0 \quad \text{pour le second point.}$$

2° Que ces points encadrent forcément le point de chute en vertu des théorèmes généraux du n° 116.

3° Que l'écart de ces deux points au point de chute mesure de chaque côté l'influence de la résistance de l'air sur le projectile, car les trois points sont confondus dans le vide.

Il est donc logique de prendre comme première approximation de u_ω, une moyenne, la moyenne arithmé-

tique par exemple, $\mu = \frac{1}{2}(u_{-\alpha} + u_{2s})$, des vitesses horizontales aux deux points considérés.

234. **Formule donnant u_ω.** — μ étant ainsi déterminé, soit par la table du n° 231 soit par le calcul précédent, posons $u_\omega = \mu + \delta$ et cherchons à déterminer la valeur de δ, correction très petite, par hypothèse. Nous emploierons le développement de Taylor en partant de l'équation

$$\frac{\mathbf{A}_\omega - \mathbf{A}_0}{\mathbf{D}_\omega - \mathbf{D}_0} = cq$$

que nous écrirons, en introduisant la fonction $\mathbf{J}_s$ du sommet

$$\mathbf{J}_s\mathbf{D}(u_\omega) - \mathbf{A}(u_\omega) = \mathbf{J}_s\mathbf{D}_0 - \mathbf{A}_0$$

d'où

$$\mathbf{J}_s\mathbf{D}(\mu + \delta) - \mathbf{A}(\mu + \delta) = \mathbf{J}_s\mathbf{D}_0 - \mathbf{A}_0$$

équation d'où on déduira δ par la formule :

$$\delta = \frac{\mathrm{F}(\mu)}{\mu(\mathbf{J}_\mu - \mathbf{J}_s)}\left[\mathbf{A}_\mu - \mathbf{A}_0 - \mathbf{J}_s(\mathbf{D}_\mu - \mathbf{D}_0)\right]$$

On devra vérifier ensuite que la valeur de $u_\omega = \mu + \delta$ ainsi trouvée satisfait bien à la relation $\frac{\mathbf{A}_\omega - \mathbf{A}_0}{\mathbf{D}_\omega - \mathbf{D}_0} = \mathbf{J}_s$, ou sinon, partir de la nouvelle valeur u_ω pour calculer une nouvelle correction δ_1.

235. **Tableau des formules du sommet et du point de chute.** — Les calculs des éléments du point de chute ayant été faits par l'intermédiaire de ceux du

sommet, on réunira toutes les formules dans le tableau ci-dessous.

SOMMET

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{J}_0 + c \operatorname{tg} \alpha$$

$$X_s = \frac{\mathbf{D}_s - \mathbf{D}_0}{c}$$

$$T_s = \frac{\mathbf{S}_s - \mathbf{S}_0}{c}$$

$$Y_s = \frac{1}{c^2} \left[\mathbf{J}_s(\mathbf{D}_s - \mathbf{D}_0) - (\mathbf{A}_s - \mathbf{A}_0)\right]$$

POINT DE CHUTE

$$\mathbf{J}_{-\alpha} = 2\mathbf{J}_s - \mathbf{J}_0$$

$$\mathbf{D}_{2s} = 2\mathbf{D}_s - \mathbf{D}_0$$

$$\mu = \frac{1}{2}(u_{-\alpha} + u_{2s})$$

$$u_\omega = \mu + \frac{F(\mu)}{\mu(\mathbf{J}_\mu - \mathbf{J}_s)} \cdot \left[\mathbf{A}_\mu - \mathbf{A}_0 - \mathbf{J}_s(\mathbf{D}_\mu - \mathbf{D}_0)\right]^1.$$

$$X = \frac{\mathbf{D}_\omega - \mathbf{D}_0}{c}$$

$$T = \frac{\mathbf{S}_\omega - \mathbf{S}_0}{c}$$

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\mathbf{J}_s - \mathbf{J}_\omega}{c}$$

§ 4. — Propriétés des trajectoires de plein fouet

236. **Génération des trajectoires de plein fouet.** — Prenons comme trajectoire type une trajec-

[1] Vérifier qu'on a bien $\mathbf{A}_\omega - \mathbf{A}_0 - \mathbf{J}_s(\mathbf{D}_\omega - \mathbf{D}_0) = 0$. Sinon prendre la valeur u_ω comme point de départ d'une deuxième approximation.

toire dont le coefficient balistique sera égal à l'unité, et dont l'angle de projection sera α. Entre les vitesses horizontales u_0 et u on aura les relations suivantes pour la trajectoire type et une trajectoire quelconque.

TRAJECT. TYPE		TRAJECT. QUELCONQUE		
$\operatorname{tg}\tau'$	$=$	$c(\operatorname{tg}\tau - \operatorname{tg}\alpha)$	$=$	$\mathbf{J}_0 - \mathbf{J}$
t'	$=$	ct	$=$	$\mathbf{S} - \mathbf{S}_0$
x'	$=$	cx	$=$	$\mathbf{D} - \mathbf{D}_0$
y'	$=$	$c^2(y - x \operatorname{tg}\alpha)$	$=$	$\mathbf{A} - \mathbf{A}_0 - \mathbf{J}_0(\mathbf{D} - \mathbf{D}_0)$

Ces deux trajectoires appartiennent à la famille $u_0 =$ const. et pour passer de l'une à l'autre, on emploiera la construction géométrique suivante :

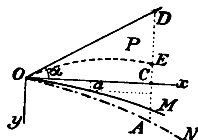


Fig. 69.

a) Supposons construite la *trajectoire type* M ($c = 1$, $\alpha = 0$).

b) On en déduira la *trajectoire* N (c, $\alpha = 0$) en multipliant les abscisses par $\frac{1}{c}$ et les ordonnées par $\frac{1}{c^2}$. Le point *a* de M vient ainsi en A sur N $\left(c = \frac{1}{2}\right.$ dans l'exemple choisi$\left.\right)$.

c) On construira la trajectoire P cherchée (c, α) en prenant pour la même abscisse l'abaissement DE égal à l'abaissement CA de la trajectoire N.

237. Théorème de l'abaissement constant. — Ainsi, toutes les trajectoires issues d'un même point sous des angles différents, ayant même coefficient balistique c et même vitesse horizontale initiale u_0, sont telles

que pour une même abscisse, leur *abaissement est constant*. Elles ont, aux points de même abscisse, même vitesse horizontale u, même durée de trajet t, même inclinaison relative $(\text{tg}\,\tau - \text{tg}\,\alpha)$.

Si on remarque que, dans le cas du tir de plein fouet traité ici, la tangente ne diffère de l'arc que par un terme du troisième ordre en τ, négligeable, par hypothèse, on pourra remplacer les ordonnées rectilignes telles que EC par des circonférences de centre O et de rayon OC et dire que dans le *Tir de plein fouet*, les trajectoires $u_0 =$ const. *tournent autour de l'origine comme pivot, comme si elles étaient des courbes rigides.*

238. **Tangente en un point de la trajectoire.** — Soit q'I la tengente au point q' de la trajectoire (c, α), dont l'inclinaison est τ; θ l'inclinaison en q de la tangente à la trajectoire (c, o). On a $\text{tg}\,\tau - \text{tg}\,\alpha = \text{tg}\,\theta$.

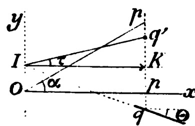


Fig. 70.

Or $Kq' = x\,\text{tg}\,\tau$ et $pp' = x\,\text{tg}\,\alpha$.

D'où $x(\text{tg}\,\tau - \text{tg}\,\alpha) = Kq' - pp'$
$= -(p'q' + Kp) = -(pq + Kq) = -Kq.$

On a donc $Kq = x\,\text{tg}\,\theta$, c'est-à-dire que les *tangentes à toutes les trajectoires* (c) *aux points correspondants à une même abscisse passent au même point* **I** *de la verticale de l'origine.*

D'ailleurs la tangente en q à la courbe (c, o) se déduirait très simplement de la tangente à la courbe $(1, o)$ par la dilatation de l'abscisse dans le rapport $\frac{1}{c}$ et de l'ordonnée dans le rapport $\frac{1}{c^2}$.

239. Trajectoire type unique des trajectoires de plein fouet. — D'après ce qui précède on a ramené à un type unique toutes les trajectoires $u_0 =$ const. Mais il est possible de généraliser encore le mode de dépendance mutuelle des diverses trajectoires.

En effet, considérons comme *trajectoire type unique* des trajectoires de plein fouet celle qui correspond au coefficient $c = 1$ et à une vitesse u_0 égale à la vitesse U arbitrairement choisie, pour laquelle s'annulent par hypothèse les fonctions balistiques. On aura, sur cette trajectoire, pour les équations du n° 236 :

$$\operatorname{tg} \tau'' = -\mathbf{J}, \qquad x'' = \mathbf{D},$$
$$t'' = \mathbf{S}, \qquad y'' = \mathbf{A}.$$

La *trajectoire type unique* sera donc construite en prenant pour abscisses les valeurs de la fonction **D** et pour ordonnées les valeurs de la fonction **A**.

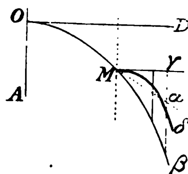


Fig. 71.

Les *trajectoires types particulières*, définies par une valeur de u_0 donnée, s'obtiendront par la propriété de l'abaissement constant. Ainsi en M, où la vitesse u_0 est définie par la valeur de **D** en ce point, on mène la tangente Mα telle que $\operatorname{tg} \tau'' = -\mathbf{J}$; puis on prend $\gamma\delta = \alpha\beta$. Le point δ engendre la trajectoire type (1, 0) correspondant à la vitese u_0. On passera de celle-ci à une trajectoire quelconque par la construction du n° 236.

240. Propriétés de la trajectoire de plein fouet. — Si on s'éloigne notablement de la région très

limitée autour du sommet où la trajectoire de plein fouet reste très voisine de la trajectoire réelle, l'hypothèse fondamentale de ce tir (213) n'est plus réalisée; il est intéressant cependant d'examiner sommairement quelles sont les propriétés de la courbe totale que représentent les équations différentielles du mouvement (88) où l'hodographe réel

$$\frac{d\tau}{\cos\tau} = \frac{g}{c}\,\frac{du}{u\mathrm{F}(v)}$$

est remplacé par l'hodographe du tir de plein fouet

$$\frac{d\tau}{\cos^2\tau} = \frac{g}{c}\,\frac{du}{u\mathrm{F}(u)}.$$

Tout d'abord, on démontrerait comme au n° 114 que sur la trajectoire de plein fouet, la vitesse horizontale u va constamment en diminuant dans le sens des abscisses croissant et en augmentant en amont de l'origine. Dans ce dernier cas, u tend vers l'infini, ainsi que v et les propriétés du point Ω (120) dépendent, pour l'une et l'autre trajectoire, des mêmes fonctions balistiques; elles ont donc la même forme.

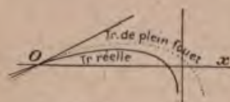


Fig. 72.

En aval de l'origine, u décroissant constamment, la résistance $\mathrm{F}(u)$ diminue. Donc, au lieu de tendre vers une vitesse limite finie, le projectile dont la résistance tend vers zéro se rapprochera de plus en plus de la trajectoire du vide; au lieu d'avoir une asymptote à distance finie, la trajectoire aura une branche descendante parabolique, et la vitesse du projectile tendra vers ∞.

D'ailleurs la vitesse v passera par un *minimum* défini par l'équation

$$cF(u) + g \sin\tau \cos\tau = 0.$$

241. **Théorème**. — *La trajectoire de plein fouet est au-dessus de la trajectoire réelle.*

En effet, on a vu, qu'aux termes en τ^6 près, l'hodographe vrai peut s'écrire :

$$\frac{d\tau}{\cos^2\tau} = \frac{g}{c}\left[\Phi + \left(\Phi + \frac{u}{2}\Phi'\right)\tau^2\right]du$$

ou en remplaçant Φ par $\dfrac{1}{uF(u)}$:

$$\frac{d\tau}{\cos^2\tau} = \frac{g}{c}\,\frac{du}{uF(u)}\,\frac{1}{1 - \dfrac{\tau^2}{2}\left(1 - \dfrac{uF'}{F}\right)}.$$

Or, avec la *loi expérimentale* de la résistance de l'air, on a toujours $\dfrac{uF'}{F} > 1$ parce que l'exposant de la résistance mise sous la forme $B_n v^n$ est toujours > 1 en quelque point que ce soit. Il en résulte que le terme $1 - \dfrac{\tau^2}{2}\left(1 - \dfrac{uF'}{F}\right)$ est toujours plus grand que l'unité. Par suite, en le remplaçant par l'unité, ce qui donne la trajectoire de plein fouet

$$\frac{d\tau}{\cos^2\tau} = \frac{g}{c}\,\frac{du}{uF(u)},$$

on prend un coefficient balistique trop faible et la trajectoire ainsi obtenue est au-dessus de la trajectoire réelle, d'après le théorème du n° 129.

Si $n < 1$, la proposition serait inversée.

242. Théorème de la rigidité de la trajectoire. — La pratique usuelle du pointage des bouches à feu, soit à la hausse, soit au niveau, aussi bien à terre qu'à bord (cas du roulis), est basée sur un théorème dit de la *rigidité de la trajectoire* et qui s'énonce ainsi : *Si une trajectoire a pour point de chute le point* P, *sous l'angle de projection* α, *pour atteindre un autre point* Q *situé sur la même verticale et tel que l'angle de site* QOP *soit égal à* ε, *il suffit de tirer avec l'angle de projection* $\alpha + \varepsilon$ (43).

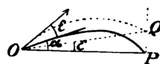


Fig. 73.

La vitesse initiale V_0 est supposée la même.

Dans les limites du tir de plein fouet, la droite PQ peut être confondue avec l'arc de cercle de centre O, à un infiniment petit du 3e ordre près, négligeable par hypothèse.

On a vu précédemment (237) que le théorème de la rigidité de la trajectoire était rigoureux dans les cas où la *vitesse initiale horizontale* u_0 reste constante pour les différentes trajectoires passant en O. Lorsqu'on l'applique au cas de trajectoires ayant même *vitesse initiale* V_0, on commet donc une erreur du second ordre en α^2, puisqu'on a $V_0 = u_0\left(1 + \frac{\alpha^2}{2}\right)$.

Cherchons l'expression de l'erreur ainsi commise.

Soient x, y les coordonnées du point Q, $\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{y}{x}$ et α_ε l'angle de projection qui permet d'atteindre le point Q.

On a (223,3°) :

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \operatorname{tg}\alpha_\varepsilon - \frac{1}{c}\left[\frac{\mathbf{A}(u) - \mathbf{A}(u_0)}{\mathbf{D}(u) - \mathbf{D}(u_0)} - \mathbf{J}(u_0)\right]$$

Soit α l'angle de projection qui permet d'atteindre le point P, tel que $\mathrm{OP} = x$.

On a :

$$cx = \mathbf{D}(u_\omega) - \mathbf{D}(u'_0)$$

u_ω étant la vitesse restante horizontale, u'_0 la vitesse initiale horizontale.

On a par hypothèse :

$$\mathbf{D}(u_\omega) - \mathbf{D}(u'_0) = \mathbf{D}(u) - \mathbf{D}(u_0).$$

Posons :

$$u_\omega = u + \eta_{1\omega} \qquad \text{et} \qquad u'_0 = u_0 + \eta_{1\alpha}.$$

La formule de Taylor donnera la relation :

$$\eta_{1\alpha} \frac{u_0}{\mathrm{F}_0} = \eta_{1\omega} \frac{u}{\mathrm{F}}.$$

D'autre part, l'angle de projection α qui correspond à la portée x sera donné par l'équation (221)

$$c \operatorname{tg} \alpha = \frac{\mathbf{A}(u + \eta_{1\omega}) - \mathbf{A}(u_0 + \eta_{1\alpha})}{\mathbf{D}(u) - \mathbf{D}(u_0)} - \mathbf{J}(u_0 + \eta_{1\alpha})$$

équation qui s'écrit :

$$c \operatorname{tg} \alpha = \frac{\mathbf{A}(u) - \mathbf{A}(u_0)}{\mathbf{D}(u) - \mathbf{D}(u_0)} - \mathbf{J}(u_0) + \frac{\eta_{1\alpha}}{\mathrm{F}_0}\left[\frac{u_0(\mathbf{J}_0 - \mathbf{J})}{\mathbf{D} - \mathbf{D}_0} + \frac{g}{u_0}\right]$$

En comparant avec la valeur de α_1, on écrira :

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \varepsilon - \eta_{1\alpha} \frac{g}{cu_0\mathrm{F}_0}\left[\frac{u_0^2}{g\mathrm{X}}(\operatorname{tg} \omega - \operatorname{tg} \alpha) + 1\right]$$

Mais $\qquad u_0 + \eta_{1\alpha} = \mathrm{V}_0 \cos \alpha,$

d'où :

$$v_{1\alpha} = V_0 \cos\alpha - V_0 \cos\alpha_1 = u_0 \left(\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_1} - 1 \right)$$

$$= \frac{u_0}{2} (\operatorname{tg}^2 \alpha_1 - \operatorname{tg}^2 \alpha) = \frac{u_0}{2} \operatorname{tg}\varepsilon \, (\operatorname{tg}\varepsilon + 2 \operatorname{tg}\alpha).$$

On a donc ainsi :

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\varepsilon$$

$$- \operatorname{tg}\varepsilon \, (\operatorname{tg}\varepsilon + 2 \operatorname{tg}\alpha) \frac{g}{2cF_0} \left[\frac{u_0^2}{gX} (\operatorname{tg}\omega - \operatorname{tg}\alpha) + 1 \right].$$

Ainsi donc, on a bien $\alpha_1 = \alpha + \varepsilon$ à *un terme du deuxième ordre près*.

Le facteur entre crochets est toujours négatif, car $\frac{u_0^2}{gX} (\operatorname{tg}\omega - \operatorname{tg}\alpha)$ est plus grand que $\frac{2u_0^2}{gX} \operatorname{tg}\alpha$, qui est le rapport de la portée dans le vide à la portée dans l'air et qui est toujours plus grand que l'unité.

On peut donc écrire

$$\alpha_1 = \alpha + \varepsilon + M\varepsilon \, (\varepsilon + 2\alpha),$$

le facteur M étant positif. Si donc, on tire constamment avec l'angle $\alpha_1 = \alpha + \varepsilon$, on pourra former le tableau suivant :

$\varepsilon > 0$ les coups sont courts.
$\varepsilon = 0$ — au but.
$\varepsilon < 0$ $\begin{cases} \varepsilon < 2\alpha & \text{les coups sont longs.} \\ \varepsilon = 2\alpha & \text{— au but.} \\ \varepsilon > 2\alpha & \text{— courts.} \end{cases}$

§ 5. — Formules différentielles

243. **Utilité des formules différentielles.** — Il est nécessaire, dans beaucoup de cas, de savoir calculer immédiatement une trajectoire en partant d'une autre très voisine. La première étant définie par les valeurs V_0, α et c des données à l'origine et étant calculée, par hypothèse, par les formules du « tir de plein fouet », la seconde sera définie par les valeurs $V_0 + \partial V_0$, $\alpha + \partial\alpha$, $c + \partial c$.

Un tel problème ne se posera guère en pratique que pour les différents éléments du point de chute et quelquefois pour ceux du sommet : la question à résoudre consiste à calculer, sans refaire à nouveau toute la série des calculs de la trajectoire de plein fouet, les variations ∂X, ∂T, $\partial\omega$ et ∂u_ω pour le point de chute, ∂X_s, ∂T_s, ∂Y_s et ∂u_s pour le sommet, qui correspondent aux petites variations dans les données initiales ∂V_0, $\partial\alpha$ et ∂c.

Ces trois dernières quantités seront, par hypothèse, très petites, et l'effet résultant de deux variations simultanées s'obtiendra par l'addition des effets de chacune.

Des problèmes de ce genre se poseront fréquemment, en pratique, dans les polygones d'expériences, au moment même du tir, soit qu'il s'agisse de déplacer le point de chute d'une petite quantité, soit qu'on cherche à corriger une différence d'un lot de poudre, soit qu'on veuille tenir compte des modifications atmosphériques

survenues le jour de l'expérience par rapport aux conditions normales.

On aura de même à résoudre sans cesse des problèmes analogues lors de la discussion des résultats d'une série de tirs balistiques établis en vue du calcul de la table de tir d'un canon. Il est nécessaire évidemment de ramener d'abord ces tirs à des conditions d'égalité parfaite des données initiales, conditions qui ne sont jamais réalisées qu'à peu près dans les expériences de polygone.

On appelle *formules différentielles* celles qui permettent d'effectuer ces petites corrections.

244. **Rappel des formules du point de chute.** — En mettant en évidence, dans les formules du n° 221, toutes les quantités susceptibles de varier, c'est-à-dire : 1° les trois données à l'origine de la trajectoire α, V_0 et c; 2° les quatre éléments du point de chute X, T, tg ω et u_ω, nous écrirons le système suivant :

$$cX = \mathbf{D}_\omega - \mathbf{D}_0\,; \quad c(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\omega) = \mathbf{J}_\omega - \mathbf{J}_0\,;$$
$$cT = \mathbf{S}_\omega - \mathbf{S}_0\,; \quad c(\mathbf{D}_\omega - \mathbf{D}_0)\operatorname{tg}\alpha = \mathbf{A}_\omega - \mathbf{A}_0 - \mathbf{J}_0(\mathbf{D}_\omega - \mathbf{D}_0).$$

Or, la dernière équation ne comprend, outre les données à l'origine α, V_0 et c, que la vitesse *restante horizontale* u_ω. En différentiant cette équation par rapport à ces quatre quantités, on aura ∂u_ω en fonction de ∂V_0, $\partial\alpha$ et ∂c.

On différentiera ensuite les trois autres par rapport aux variables qui y figurent et qui sont au nombre de cinq dans chacune, savoir α, V_0, c, u_ω et [X, T ou ω].

Remplaçant ensuite ∂u_ω par la valeur trouvée d'après

la dernière équation, on obtiendra les formules différentielles cherchées.

245. **Variations de la vitesse restante horizontale.** — Développons les calculs nécessaires pour trouver ∂u_ω.

On écrira :

$$c(\mathbf{D}_\omega - \mathbf{D}_0)\ \mathrm{tg}\,\alpha \left(\frac{\partial c}{c} + \frac{\partial \mathbf{D}_\omega - \partial \mathbf{D}_0}{\mathbf{D}_\omega - \mathbf{D}_0} + \frac{\partial \alpha}{\mathrm{tg}\,\alpha}\right)$$

$$= \partial \mathbf{A}_\omega - \partial \mathbf{A}_0 - \mathbf{J}_0(\mathbf{D}_\omega - \mathbf{D}_0)\left(\frac{\partial \mathbf{J}_0}{\mathbf{J}_0} + \frac{\partial \mathbf{D}_\omega - \partial \mathbf{D}_0}{\mathbf{D}_\omega - \mathbf{D}_0}\right).$$

On a mis $\partial\alpha$ au lieu de $\dfrac{\partial \alpha}{\cos^2 \alpha}$, parce que on ne néglige ainsi qu'un terme de 3e ordre en α.

Tenant compte des équations de définition des fonctions balistiques (219) :

$$\partial \mathbf{A} = \mathbf{J}\partial \mathbf{D}\,; \qquad \partial \mathbf{D} = -\frac{u\partial u}{\mathrm{F}}\,; \qquad \partial \mathbf{J} = -g\,\frac{\partial u}{u\mathrm{F}}$$

il viendra, les termes semblables réunis :

$$c\ \mathrm{tg}\,\omega\,\frac{u_\omega \partial u_\omega}{\mathrm{F}_\omega} = (\mathbf{D}_\omega - \mathbf{D}_0)\ \mathrm{tg}\,\alpha\ \partial c$$
$$+\left(cu_0\ \mathrm{tg}\,\alpha - g\,\frac{\mathbf{D}_\omega - \mathbf{D}_0}{u_0}\right)\frac{\partial u_0}{\mathrm{F}_0}$$
$$+ c(\mathbf{D}_\omega - \mathbf{D}_0)\partial\alpha.$$

Mais, comme $u_0 = \mathrm{V}_0 \cos \alpha$, on aura :

$$\partial u_0 = \partial \mathrm{V}_0 \cos \alpha - \mathrm{V}_0 \partial \alpha\ \mathrm{tg}\,\alpha,$$

car on peut écrire $-\mathrm{V}_0\partial\alpha\ \mathrm{tg}\,\alpha$ au lieu de $-\mathrm{V}_0\partial\alpha \sin \alpha$,

à un terme du 3e ordre près. La formule à laquelle on arrive est alors :

$$u_\omega \frac{\partial u_\omega}{cF_\omega} = X \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \omega} \frac{\partial c}{c}$$
$$- \frac{gX - u_0^2 \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \omega} \frac{1}{cF_0} \frac{\partial V_0}{V_0}$$
$$+ \left[\frac{X}{\operatorname{tg}\omega} + \frac{gX - u_0^2 \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \omega} \frac{1}{cF_0} \operatorname{tg} \alpha \right] \partial\alpha.$$

Dans cette formule, chaque ligne représente la variation due à un élément particulier ∂c, ∂V_0 ou $\partial\alpha$.

On doit remarquer que la variation due à $\partial\alpha$ se compose de deux termes; mais ils sont de grandeur différente, le second étant du second ordre par rapport au premier, à cause du facteur $\operatorname{tg} \alpha$ qui le multiplie.

246. **Variations des autres éléments du point de chute.** — On écrira pour les trois autres équations du n° 244 :

$$c\partial X + X\partial c = - \frac{u_\omega}{F_\omega} \partial u_\omega + \frac{u_0}{F_0} \partial u_0$$

$$c\partial T + T\partial c = - \frac{1}{F_\omega} \partial u_\omega + \frac{1}{F_0} \partial u_0$$

$$c(\partial\omega - \partial\alpha) + (\operatorname{tg} \omega - \operatorname{tg} \alpha)\partial c = - \frac{g}{u_0 F_0} \partial u_0 + \frac{g}{u_\omega F_\omega} \partial u_\omega.$$

En portant dans ces équations la valeur trouvée pour ∂u_ω (245), on arrivera aux formules définitives dont l'ensemble est renfermé dans le tableau du n° 247.

247. Tableau des formules différentielles du point de chute.

	VARIATION ∂c du coefficient balistique.	VARIATION ∂V_0 de la vitesse initiale.	VARIATION $\partial \alpha$ de l'angle de projection.
$Z = \dfrac{gX - u_0^2 \operatorname{tg} \alpha}{u_0^2 \operatorname{tg} \omega}$			
I. — Variations de la portée X			
$\partial X =$	$-X\left(1 + \dfrac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \omega}\right)\dfrac{\partial c}{c}$	$+(1+Z)\dfrac{u_0^2}{cF_0}\dfrac{\partial V_0}{V_0}$	$-\left[\dfrac{X}{\operatorname{tg} \omega} + (1+Z)\dfrac{u_0^2}{cF_0}\operatorname{tg} \alpha\right]\partial \alpha$
II. — Variations de la durée du trajet T			
$\partial T =$	$-\left(T + \dfrac{X}{u_\omega}\dfrac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \omega}\right)\dfrac{\partial c}{c}$	$+\left(1 + \dfrac{u_0}{u_\omega}Z\right)\dfrac{u_0}{cF_0}\dfrac{\partial V_0}{V_0}$	$-\left[\dfrac{X}{u_\omega \operatorname{tg} \omega} + \left(1 + \dfrac{u_0}{u_\omega}Z\right)\dfrac{u_0}{cF_0}\operatorname{tg} \alpha\right]\partial \alpha$
III. — Variations de l'angle de chute ω			
$\partial \omega =$	$\left(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \omega + \dfrac{gX \operatorname{tg} \alpha}{u_\omega^2 \operatorname{tg} \omega}\right)\dfrac{\partial c}{c}$	$-\left(1 + \dfrac{u_0^2}{u_\omega^2}Z\right)\dfrac{g}{cF_0}\dfrac{\partial V_0}{V_0}$	$+\left[1 + \dfrac{gX}{u_\omega^2 \operatorname{tg} \omega} + \left(1 + \dfrac{u_0^2}{u_\omega^2}Z\right)\dfrac{g}{cF_0}\operatorname{tg} \alpha\right]\partial \alpha$
IV. — Variations de la vitesse restante horizontale u_ω			
$\partial u_\omega =$	$X\dfrac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \omega}\dfrac{cF_\omega}{u_\omega}\dfrac{\partial c}{c}$	$-\dfrac{u_0^2}{u_\omega}Z\dfrac{F_\omega}{F_0}\dfrac{\partial V_0}{V_0}$	$+\left[\dfrac{X}{\operatorname{tg} \omega}\dfrac{cF_\omega}{u_\omega} + \dfrac{u_0^2}{u_\omega}\dfrac{F_\omega}{F_0}Z \operatorname{tg} \alpha\right]\partial \alpha$

Nota : Dans toutes ces formules tg ω doit être porté avec son signe —

248. Formules différentielles du sommet. — On appliquera une méthode tout à fait analogue en partant des équations du sommet (220) :

$$c \operatorname{tg} \alpha = \mathbf{J}_s - \mathbf{J}_0, \qquad c X_s = \mathbf{D}_s - \mathbf{D}_0,$$
$$c T_s = \mathbf{S}_s - \mathbf{S}_0, \qquad c^2 Y_s = \mathbf{J}_s (\mathbf{D}_s - \mathbf{D}_0) - (\mathbf{A}_s - \mathbf{A}_0).$$

Ainsi, on différentiera la première de la manière suivante :

$$\operatorname{tg} \alpha \partial c + c \partial \alpha = -\frac{g}{u_s F_s} \partial u_s + \frac{g}{u_0 F_0} \partial u_0$$

ce qui en tenant compte de la valeur de

$$\partial u_0 = \partial V_0 \cos \alpha - V_0 \partial \alpha \operatorname{tg} \alpha$$

donne :

$$\frac{1}{c F_s} \frac{\partial u_s}{u_s} = -\frac{1}{g} \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial c}{c} + \frac{1}{c F_0} \frac{\partial V_0}{V_0} - \left(\frac{1}{g} + \frac{1}{c F_0} \operatorname{tg} \alpha\right) \partial \alpha.$$

Et ainsi des autres, de sorte qu'on pourra écrire l'ensemble des formules du tableau du n° 249.

	VARIATION ∂c du coefficient balistique.	VARIATION ∂V_0 de la vitesse initiale.	VARIATION $\partial \alpha$ de l'angle de projection.
I. — Variations de l'abscisse du sommet X_s			
$\partial X_s =$	$\left(\frac{u_s^2}{g}\operatorname{tg}\alpha - X_s\right)\frac{\partial c}{c}$	$+(u_0^2 - u_s^2)\frac{1}{cF_0}\frac{\partial V_0}{V_0}$	$+\left(\frac{u_s^2}{g} - (u_0^2 - u_s^2)\frac{\operatorname{tg}\alpha}{cF_0}\right)\partial\alpha$
II. — Variations de la durée du trajet T_s			
$\partial T_s =$	$\left(\frac{u_s}{g}\operatorname{tg}\alpha - T_s\right)\frac{\partial c}{c}$	$+(u_0 - u_s)\frac{1}{cF_0}\frac{\partial V_0}{V_0}$	$+\left[\frac{u_s}{g} - (u_0 - u_s)\frac{\operatorname{tg}\alpha}{cF_0}\right]\partial\alpha$
III. — Variations de la flèche Y_s			
$\partial Y_s =$	$(X_s\operatorname{tg}\alpha - 2Y_s)\frac{\partial c}{c}$	$+(u_0^2\operatorname{tg}\alpha - gX_s)\frac{1}{cF_0}\frac{\partial V_0}{V_0}$	$+\left[X_s - (u_0^2\operatorname{tg}\alpha - gX_s)\frac{\operatorname{tg}\alpha}{cF_0}\right]\partial\alpha$
IV. — Variations de la vitesse au sommet u_s			
$\partial u_s =$	$-\frac{u_s}{g}F_s\operatorname{tg}\alpha\,\partial c$	$+u_s\frac{F_s}{F_0}\frac{\partial V_0}{V_0}$	$-\left[\frac{cF_s}{g}u_s + u_s\operatorname{tg}\alpha\right]\partial\alpha$

250. Remarques sur les formules différentielles du point de chute.

1° *Variation* δV_0. — *a*) Le facteur

$$1 + Z = 1 + \frac{gX - u_0^2 \operatorname{tg} \alpha}{u_0^2 \operatorname{tg} \omega}$$

est toujours positif.

Si $gX < u_0^2 \operatorname{tg} \alpha$, comme $\operatorname{tg} \omega$ est négatif, la proposition est démontrée : c'est le cas où la portée X dans l'air est inférieure à la moitié de celle du vide.

Si, au contraire $gX > u_0^2 \operatorname{tg} \alpha$, je dis que le quotient $\dfrac{gX - u_0^2 \operatorname{tg} \alpha}{u_0^2 \operatorname{tg} \omega}$, en y prenant $\operatorname{tg} \omega$ en valeur absolue, est < 1.

Posons en effet :

$$gX - u_0^2 \operatorname{tg} \alpha < u_0^2 \operatorname{tg} \omega$$

d'où :

$$gX < u_0^2 (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \omega)$$

ce qui est toujours vrai, puisqu'on a $X < \dfrac{2u_0^2 \operatorname{tg} \alpha}{g}$, le 2e membre étant la portée dans le vide et ω étant $> \alpha$.

Ainsi donc, *à une variation positive de la vitesse initiale correspond toujours une variation de portée positive.*

b) On ne peut affirmer que le facteur $\left(1 + \dfrac{u_0}{u_\omega} Z\right)$ qui figure dans l'expression de δT, ni le facteur $\left(1 + \left(\dfrac{u_0}{u_\omega}\right)^2 Z\right)$ qui figure dans l'expression de $\delta \omega$ restent constamment positifs, quand la portée est inférieure à la moitié de celle du vide.

Ainsi donc, il peut se faire que la *durée du trajet diminue quand la vitesse initiale augmente.*

c) La *vitesse restante horizontale* u_ω diminue quand V_0 croît, lorsque la portée est plus petite que la moitié de la portée dans le vide : elle croît avec V_0 dans le cas contraire.

2° *Variation* $\partial\alpha$. — *a*) Quand $\partial\alpha$ varie, il n'y a d'ambiguïté possible que sur le signe de $\partial\omega$. Mais il est aisé de voir qu'en valeur absolue le facteur $\frac{gX}{u_\omega^2 \operatorname{tg} \omega}$ est > 1. Car la quantité $\frac{u_\omega^2 \operatorname{tg} \omega}{g}$ représente la moitié de la portée obtenue en considérant la trajectoire du vide osculatrice au point de chute de la trajectoire dans l'air. Or, d'après un théorème connu (131) cette trajectoire du vide ne coupe plus la trajectoire atmosphérique en aucun point réel en dehors des trois points réunis au point de chute.

Comme cette trajectoire du vide est au-dessous de la trajectoire dans l'air, on a $\frac{2u_\omega^2 \operatorname{tg} \omega}{g} < X$ et par suite $\frac{gX}{u_\omega^2 \operatorname{tg} \omega} > 2$.

L'angle de chute augmente donc toujours avec l'angle de projection.

b) On a supposé, dans les démonstrations, que le second terme qui entre dans la variation $\partial\alpha$, c'est-à-dire $\left(1 + \frac{u_0^2}{u_\omega^2} Z\right) \frac{g}{cF_0} \operatorname{tg} \alpha$ était du second ordre par rapport au premier, conformément aux hypothèses du tir de plein fouet. Par exemple, il ne serait pas correct de

chercher l'angle de portée maximum, en annulant $\frac{\partial X}{\partial \alpha}$ par la formule

$$\frac{X}{\operatorname{tg} \omega} + (1 + Z) \frac{u_0^2}{cF_0} \operatorname{tg} \alpha = 0 ;$$

cette formule, pour cette application, n'a aucun sens.

c) *La vitesse restante horizontale diminue toujours quand* α *augmente.*

3° *Variation* ∂c. — *a*) Quand ∂c est positif, les variations de *portée* ∂X et de *vitesse restante horizontale*, sont négatives.

b) Quand ∂c est positif, ∂T est positif ou négatif suivant que T est plus grand ou plus petit que $\frac{X}{u_\omega} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \omega}$. De même, il peut y avoir ambiguïté pour le signe de $\partial \omega$.

CHAPITRE X

FORMES DIVERSES DES ÉQUATIONS DU TIR DE PLEIN FOUET

§ 1. — Les trajectoires de Siacci

251. **Définition de ces trajectoires.** — C'est le colonel Siacci qui a introduit les fonctions balistiques du premier terme, **J**, **S**, **D** et **A** dans la « théorie du tir de plein fouet » et a pu, par cette méthode, intégrer, le premier, les équations du mouvement en laissant arbitraire la fonction F(*v*). Mais la solution qui est, en général, connue sous son nom, n'est pas présentée, dans les Traités de Balistique, ainsi que nous l'avons fait, c'est-à-dire, sous la forme explicite du premier terme d'une série.

Voici comment on peut traiter le problème, en généralisant les raisonnements de Siacci : étant données les quatre équations du mouvement

$$g\,\frac{du}{cv\mathrm{F}(v)} = d\tau\,; \qquad dx = -\,\frac{u^2}{g}\,\frac{d\tau}{\cos^2\tau}\,;$$

$$dt = -\,\frac{u}{g}\,\frac{d\tau}{\cos^2\tau}\,; \qquad dy = -\,\frac{u^2}{g}\,\mathrm{tg}\,\tau\,\frac{d\tau}{\cos^2\tau}$$

on remarquera que les trois dernières ne renferment

dans leurs seconds membres que u, tg τ et sa dérivée $\frac{d\tau}{\cos^2\tau}$. Donc, pour pouvoir intégrer immédiatement ces trois équations et résoudre le problème, il serait nécessaire et suffisant que l'hodographe donnât justement l'expression de tg τ en fonction de u (210). Voyons donc au prix de quelle altération systématique et moyennant quelle approximation, on pourra arriver à ce résultat.

On écrira l'hodographe, d'une manière identique

$$\frac{d\tau}{\cos^2\tau} = \frac{g}{c} \frac{du}{u \cos\tau \, F\left(\frac{u}{\cos\tau}\right)}$$

et, pour rendre le deuxième membre fonction de u seul, on remplacera, par des *constantes* convenablement choisies, les deux cosinus qui figurent au dénominateur.

Le premier étant remplacé par cos λ et le deuxième par cos μ, on aura :

$$\frac{d\tau}{\cos^2\tau} = \frac{g}{c\cos\lambda} \frac{du}{uF\left(\frac{u}{\cos\mu}\right)}.$$

Posant ensuite $\sigma = \frac{u}{\cos\mu}$, on prendra σ comme variable et les équations différentielles du mouvement seront les suivantes :

$$\frac{d\tau}{\cos^2\tau} = \frac{g}{c\cos\lambda} \frac{d\sigma}{\sigma F(\sigma)}; \qquad \frac{dx}{\cos^2\mu} = -\frac{\sigma^2}{g} \frac{d\tau}{\cos^2\tau};$$

$$\frac{dt}{\cos\mu} = -\frac{\sigma}{g} \frac{d\tau}{\cos^2\tau}; \qquad \frac{dy}{\cos^2\mu} = -\frac{\sigma^2}{g} \operatorname{tg}\tau \frac{d\tau}{\cos^2\tau}.$$

252. **Formules générales de Siacci.** — Ces équations s'intègrent immédiatement comme les équations du tir de plein fouet (219) et donnent le système suivant :

$$\operatorname{tg}\tau = \operatorname{tg}\alpha + \frac{\mathbf{J}_0 - \mathbf{J}}{c\cos\lambda}; \quad x = \frac{\cos^2\mu}{c\cos\lambda}(\mathbf{D} - \mathbf{D}_0);$$

$$t = \frac{\cos\mu}{c\cos\lambda}(\mathbf{S} - \mathbf{S}_0); \quad y = x\operatorname{tg}\alpha - \frac{\cos^2\mu}{c^2\cos^2\lambda}\left[\mathbf{A} - \mathbf{A}_0 - \mathbf{J}_0(\mathbf{D} - \mathbf{D}_0)\right]$$

La variable σ des quatre fonctions balistiques est telle que

$$\sigma = \frac{u}{\cos\mu}.$$

Ce sont là les *trajectoires les plus générales* de Siacci, avec leurs deux coefficients $\cos\lambda$ et $\cos\mu$.

On aura :

Au *point de chute* et au *sommet :*

$$\operatorname{tg}\omega = \operatorname{tg}\alpha + \frac{\mathbf{J}_0 - \mathbf{J}_\omega}{c\cos\lambda}$$

$$\mathrm{T} = \cos\mu\,\frac{\mathbf{S}_\omega - \mathbf{S}_0}{c\cos\lambda}$$

$$\mathrm{X} = \cos^2\mu\,\frac{\mathbf{D}_\omega - \mathbf{D}_0}{c\cos\lambda}$$

$$\frac{\mathbf{A}_\omega - \mathbf{A}_0}{\mathbf{D}_\omega - \mathbf{D}_0} = \mathbf{J}_0 + c\cos\lambda\operatorname{tg}\alpha$$

$$0 = \operatorname{tg}\alpha + \frac{\mathbf{J}_0 - \mathbf{J}_s}{c\cos\lambda}$$

$$\mathrm{T}_s = \cos\mu\,\frac{\mathbf{S}_s - \mathbf{S}_0}{c\cos\lambda}$$

$$\mathrm{X}_s = \cos^2\mu\,\frac{\mathbf{D}_s - \mathbf{D}_0}{c\cos\lambda}$$

$$\mathrm{Y}_s = \mathrm{X}_s\operatorname{tg}\alpha - \frac{\cos^2\mu}{c^2\cos^2\lambda}\left[\mathbf{A}_s - \mathbf{A}_0 - \mathbf{J}_0(\mathbf{D}_s - \mathbf{D}_0)\right]$$

253. **Trajectoires limites.** — Rien n'indique, *a priori*, quelles valeurs on doit attribuer à $\cos\lambda$ et à $\cos\mu$

dans les équations ci-dessus et pour rechercher ces valeurs il est clair qu'il sera nécessaire de recourir à une théorie plus complète, qui consistera à rechercher l'expression du second terme ainsi que nous le ferons plus loin (Ch. XI).

Tout ce qu'on peut dire, *a priori*, c'est que si on considère la trajectoire entière, $\cos \lambda$ et $\cos \mu$ ne peuvent varier qu'entre 1 et $\cos \omega$, valeurs qui correspondent aux limites extrêmes des variations de τ, de 0 au sommet, à ω au point de chute.

1° *Trajectoire minimum.* — Dans les équations du mouvement, l'hodographe seul a été altéré (251) et on l'a écrit :

$$\frac{d\tau}{\cos^2 \tau} = \frac{g}{c} \frac{du}{\cos \lambda \, u\mathrm{F}\left(\frac{u}{\cos \mu}\right)}$$

au lieu de

$$\frac{d\tau}{\cos^2 \tau} = \frac{g}{c} \frac{du}{\cos \tau \, u\mathrm{F}\left(\frac{u}{\cos \tau}\right)}$$

a) Si on prend $\cos \lambda = 1$, on aura $\cos \lambda = q_1 \cos \tau$, q_1 étant un coefficient variable, mais toujours plus grand que 1.

b) Si on prend $\cos \mu = \cos \omega$, on aura :

$$\mathrm{F}\left(\frac{u}{\cos \omega}\right) > \mathrm{F}\left(\frac{u}{\cos \tau}\right)$$

c'est-à-dire $\mathrm{F}\left(\frac{u}{\cos \mu}\right) = q_2 \mathrm{F}\left(\frac{u}{\cos \tau}\right)$, q_2 étant un coefficient plus grand que 1.

Donc

$$c \cos \lambda \; u \, F\left(\frac{u}{\cos \mu}\right) = q_1 q_2 c \cos \tau \; u F\left(\frac{u}{\cos \tau}\right).$$

L'altération qu'on fait subir à l'hodographe revient donc à multiplier le *coefficient balistique* c par un produit $q_1 q_2$ qui est plus grand que l'unité.

Donc, d'après un théorème général (129), la trajectoire modifiée est *au-dessous de la trajectoire réelle*. Elle représente la trajectoire *minimum*.

Nous la désignerons par trajectoire $\begin{cases} \cos \lambda = 1 \\ \cos \mu = \cos \omega. \end{cases}$

Mais il faut bien remarquer que cette trajectoire ne reste pas constamment *au-dessous* de la trajectoire véritable, car on peut répéter sur celle-ci la démonstration du n° 240 et montrer qu'elle a une branche descendante de forme parabolique qui coupe forcément la trajectoire vraie, mais *en un point en aval* du point de chute.

2° *Trajectoire maximum*. — On démontrerait exactement par le même procédé, qu'on remplace le coefficient balistique c de la véritable trajectoire par un autre plus faible, et par suite qu'on a une *trajectoire maximum* en considérant celle qui est désignée par la notation $\begin{cases} \cos \lambda = \cos \omega \\ \cos \mu = 1. \end{cases}$

Mais nous avons démontré de plus (241) que, avec la fonction $F(v)$ expérimentale, la *trajectoire de plein fouet* du Chapitre IX, désignée par la notation $\begin{cases} \cos \lambda = 1 \\ \cos \mu = 1 \end{cases}$ était aussi une *trajectoire maximum*.

254. Différence entre deux trajectoires de Siacci. — Toutes les trajectoires de Siacci forment

un faisceau limité par les trajectoires ci-dessus définies et à l'intérieur duquel, dans une position inconnue se trouve la trajectoire véritable. Il est d'ailleurs évident que toutes ces trajectoires ne diffèrent que par *un terme du troisième ordre* en τ, car le développement de $\cos\lambda$ et de $\cos\mu$ se ferait d'une manière tout à fait analogue à celle qui a été employée au n° 214.

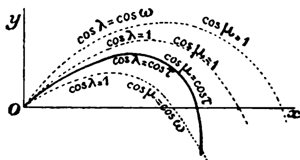


Fig. 74.

Proposons-nous de chercher la différence entre une trajectoire quelconque de Siacci $\left\{\begin{array}{l}\cos\lambda\\ \cos\mu\end{array}\right.$ et la trajectoire de plein fouet $\left\{\begin{array}{l}\cos\lambda = 1\\ \cos\mu = 1\end{array}\right.$ étudiée au chapitre précédent.

Nous n'examinerons que le point de chute ; le calcul est assez analogue à celui du n° 245 pour l'établissement des formules différentielles.

Soit u_ω la vitesse restante horizontale de la trajectoire $\left\{\begin{array}{l}\cos\lambda = 1\\ \cos\mu = 1\end{array}\right.$, vitesse qui satisfait à la relation

$$\frac{\mathbf{A}(u_\omega) - \mathbf{A}(u_0)}{\mathbf{D}(u_\omega) - \mathbf{D}(u_0)} = \mathbf{J}(u_0) + c \operatorname{tg} \alpha.$$

Soit d'autre part $u_\omega + \delta$ la vitesse restante de la trajectoire $\left\{\begin{array}{l}\cos\lambda\\ \cos\mu\end{array}\right.$. On prendra

$$\cos\lambda = 1 - \frac{\lambda^2}{2} \quad \text{et} \quad \cos\mu = 1 - \frac{\mu^2}{2}$$

d'où $$\sigma = \frac{u}{\cos\mu} = u\left(1 + \frac{\mu^2}{2}\right).$$

La formule du n° 252 devient alors :

$$\frac{\mathbf{A}\left(u_\omega + \delta + \frac{\mu^2}{2}u_\omega\right) - \mathbf{A}\left(u_0 + \frac{\mu^2}{2}u_0\right)}{\mathbf{D}\left(u_\omega + \delta + \frac{\mu^2}{2}u_\omega\right) - \mathbf{D}\left(u_0 + \frac{\mu^2}{2}u_0\right)}$$
$$= \mathbf{J}\left(u_0 + \frac{\mu^2}{2}u_0\right) + c\left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right)\operatorname{tg}\alpha.$$

Développant cette équation par la formule de Taylor, on obtiendra une relation entre δ, μ^2 et λ^2. Soit δ désigné maintenant par $\Delta_\mu^\lambda u_\omega$. On trouve :

$$\Delta_\mu^\lambda u_\omega = \frac{\mu^2}{2}\left[\frac{F_\omega}{F_0}\frac{u_0^2\operatorname{tg}\alpha - gX}{u_\omega\operatorname{tg}\omega} - u_\omega\right] - \frac{\lambda^2}{2}\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\omega}\frac{cF_\omega}{u_\omega}X$$

Pour un autre élément, X par exemple, on écrira :

$$\Delta_\mu^\lambda X = \frac{1-\mu^2}{1-\frac{\lambda^2}{2}}\frac{1}{c}\left[\mathbf{D}\left(u_\omega + \delta + \frac{\mu^2}{2}u_\omega\right) - \mathbf{D}\left(u_0 + \frac{\mu^2}{2}u_0\right)\right]$$
$$- \frac{1}{c}\left[\mathbf{D}(u_\omega) - \mathbf{D}(u_0)\right]$$

et comme δ est connu, on aura $\Delta_\mu^\lambda X$ en fonction de λ et de μ.

On arrive ainsi au système des formules suivantes, en introduisant dans les équations la fonction (217)

$$Z = \frac{gX - u_0^2\operatorname{tg}\alpha}{u_0^2\operatorname{tg}\omega}$$

$$\Delta_{\mu}^{\lambda} X = \text{tg}^2 \mu \left[\frac{u_0^2}{2cF_0}(1 + Z) - X \right] \quad + \frac{\text{tg}^2 \lambda}{2} \left[1 + \frac{\text{tg}\,\alpha}{\text{tg}\,\omega} \right] X$$

$$\Delta_{\mu}^{\lambda} T = \frac{\text{tg}^2 \mu}{2} \left[\frac{u_0}{cF_0} \left(1 + \frac{u_0}{u_\omega} Z \right) - T \right] \quad + \frac{\text{tg}^2 \lambda}{2} \left[\frac{X}{u_\omega} \frac{\text{tg}\,\alpha}{\text{tg}\,\omega} + T \right]$$

$$\Delta_{\mu}^{\lambda} \omega = - \frac{\text{tg}^2 \mu}{2} \frac{g}{cF_0} \left[1 + \frac{u_0^2}{u_\omega^2} Z \right] \quad - \frac{\text{tg}^2 \lambda}{2} \left[\frac{gX}{u_0^2} \frac{\text{tg}\,\alpha}{\text{tg}\,\omega} - \text{tg}\,\omega + \text{tg}\,\alpha \right]$$

$$\Delta_{\mu}^{\lambda} u_\omega = - \frac{\text{tg}^2 \mu}{2} u_\omega \left[1 + \frac{u_0^2}{u_\omega^2} \frac{F_\omega}{F_0} Z \right] \quad - \frac{\text{tg}^2 \lambda}{2} \frac{\text{tg}\,\alpha}{\text{tg}\,\omega} \frac{cF_\omega}{u_\omega} X$$

Dans les termes de droite, on reconnaît les formules du n° 247, $\frac{dc}{c}$ étant remplacé par $-\frac{1}{2}\,\text{tg}^2\lambda$.

Ainsi, par exemple, l'étendue en portée du faisceau des trajectoires de Siacci entre la *trajectoire minimum* $\left\{ \begin{array}{l} \cos\lambda = 1 \\ \cos\mu = \cos\omega \end{array} \right.$ et la *trajectoire maximum* $\left\{ \begin{array}{l} \cos\lambda = 1 \\ \cos\mu = 1 \end{array} \right.$ est donnée par la formule :

$$\Delta_{\mu}^{\lambda} X = \text{tg}^2 \omega \left[\frac{u_0^2}{2cF_0}(1 + Z) - X \right].$$

255. **Valeurs diverses admises pour cos λ et pour cos μ.** — Suivant les auteurs, diverses valeurs ont été admises pour les valeurs de $\cos\lambda$ et de $\cos\mu$ qu'il convient de porter dans l'équation du n° 252 ; comme on l'a dit, une détermination précise exige une seconde approximation du problème.

1° Siacci, dans le premier exposé qu'il donne de sa méthode, choisit tout d'abord $\cos\lambda = \cos\mu = \cos\alpha$

2° Plus tard, en vue de faire coïncider dans un cas

particulier, les trajectoires du n° 252 avec des trajectoires que l'expérience vérifiait (274), Siacci choisit

$$\cos\mu = \cos\alpha \qquad \text{et} \qquad \cos\lambda = \cos^2\alpha.$$

Les formules du *point de chute* deviennent alors

$$\operatorname{tg}\omega = \operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\cos^2\alpha}\,\frac{\mathbf{J}_0 - \mathbf{J}_\omega}{c}$$

$$\mathrm{T} = \frac{1}{\cos\alpha}\,\frac{\mathbf{S}_\omega - \mathbf{S}_0}{c}$$

$$\mathrm{X} = \frac{\mathbf{D}_\omega - \mathbf{D}_0}{c}$$

$$\frac{\mathbf{A}_\omega - \mathbf{A}_0}{\mathbf{D}_\omega - \mathbf{D}_0} = \mathbf{J}_0 + \frac{c}{2}\sin 2\alpha.$$

La variable dans ces équations est $\sigma = \dfrac{u}{\cos\alpha}$. Elle est désignée par Siacci sous le nom de *pseudo-vitesse;* c'est la projection MP de la vitesse v sur la tangente à l'origine de la trajectoire, parallèlement à l'axe des y.

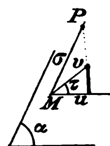


Fig. 75.

3° *Didion*, pour un cas particulier, et *Mayewski*, pour le cas général, prennent

$$\cos\lambda = \cos\mu = \frac{1}{m},$$

m étant une quantité (rapport de l'arc à sa projection dans le vide (18)) dont la valeur est

$$m = \frac{\xi_2(\alpha) - \xi_2(\omega)}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\omega} \qquad \text{avec} \qquad \xi_2(\tau) = \int_0^\tau \frac{d\tau}{\cos^3\tau}.$$

L'expression de m est une moyenne entre les diffé-

rentes valeurs de $\cos\tau$, depuis α jusqu'à ω. D'après le développement de $\xi_2(\tau)$ en série (160) on a :

$$m = 1 + \frac{\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\omega + \operatorname{tg}^2\omega}{6}$$

4° D'après ce qui a été démontré précédemment, on obtiendrait une trajectoire intermédiaire entre la trajectoire maximum $\begin{cases}\cos\lambda = 1 \\ \cos\mu = 1\end{cases}$ et la trajectoire minimum $\begin{cases}\cos\lambda = 1 \\ \cos\mu = \cos\omega\end{cases}$ en adoptant une trajectoire $\begin{cases}\cos\lambda = 1. \\ \cos\mu = \cos\alpha.\end{cases}$

Mais, dans le problème insoluble du choix *a priori* du coefficient convenable, on ne doit pas perdre de vue les deux points suivants :

a) Le choix de ce coefficient n'influe que sur le second terme de la série qui est du troisième ordre ; sitôt que ce terme deviendra notable, on sera obligé de lui en adjoindre un autre, du même ordre de grandeur, destiné à tenir compte de la variation de la densité de l'air avec l'altitude (4). Or ce terme a pour effet d'agir en sens inverse du premier en diminuant le coefficient balistique ; il tendra donc à rapprocher $\cos\mu$ de l'unité.

b) Sitôt que le deuxième terme de la série devient important, on sort de la région où les formules simples du tir de plein fouet sont applicables et il devient nécessaire de calculer le second terme de la série par des formules plus compliquées.

Pour ces raisons, le choix de la trajectoire de plein fouet la plus simple ($\cos\lambda = \cos\mu = 1$) qui conduit aux équations du n° 219, s'impose.

256. **Trajectoire où v est la variable indépendante**. — On peut se demander si la trajectoire répondant aux équations du tir de plein fouet (219), mais où, au lieu de u, on prendrait pour variable indépendante la vitesse v elle-même, fait partie du groupe des trajectoires de Siacci.

Il est aisé de voir qu'il n'en est rien. En effet, on peut obtenir ces équations en partant de l'hodographe écrit de la manière suivante, à un terme en τ^3 près.

$$\frac{g}{c}\frac{dv}{v\mathrm{F}(v)} - \frac{g}{c\mathrm{F}}\sin\tau\,d\tau = \frac{d\tau}{\cos^2\tau}.$$

On obtiendra les équations du tir de plein fouet *avec la variable* v, en écrivant

$$\frac{g}{c}\frac{dv}{v\mathrm{F}(v)} = \frac{d\tau}{\cos^2\tau}$$

et en négligeant par suite un terme $\frac{g}{c\mathrm{F}}\sin\tau\,d\tau$ qui est du second ordre en τ.

Pour qu'on ne négligeât qu'un terme du troisième ordre, il faudrait donc que $\frac{g}{c\mathrm{F}}$ fût une quantité très petite, de l'ordre de grandeur de τ, ce que nous n'avons pas supposé (213). Cette hypothèse rentre, en effet, dans un autre problème. *Tir tendu à grande vitesse*, Chap. XIII.

257. **Formules de Sladen**. — On trouve, dans quelques Traités de Balistique, des formules dites parfois « de Sladen » qui sont d'ailleurs la généralisation de formules employées depuis longtemps par les balis-

ticiens du XVIIIe siècle, dans des cas particuliers. On les établit comme il suit :

Si on considère les équations différentielles du mouvement sous la forme (86)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -cF(v) \cos \tau ; \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -g - cF(v) \sin \tau.$$

la première se réduit à

$$\frac{dv}{dt} = -cF(v)$$

dans le cas où $\cos \tau$ est voisin de l'unité, car la vitesse se projette en vraie grandeur sur l'axe des x; il en est de même de la résistance de l'air.

La seconde se réduit à

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g$$

quand, par suite de la petitesse du facteur $\sin \tau$, le terme $cF \sin \tau$, projection de la résistance sur l'axe des y, devient négligeable devant g.

Les deux mouvements sont ainsi indépendants l'un de l'autre et, intégrés, ces équations donnent :

$$x = \frac{\mathbf{D} - \mathbf{D}_0}{c}, \qquad v \sin \tau = V_0 \sin \alpha - gt$$

$$t = \frac{\mathbf{S} - \mathbf{S}_0}{c}, \qquad y = V_0 \sin \alpha \, t - \frac{1}{2} gt^2.$$

Il y a ainsi un mélange, le plus souvent peu correct, des deux cas-limites du problème balistique, la colonne

de gauche représentant le mouvement rectiligne $g = 0$ et la colonne de droite représentant le mouvement dans le vide, $cF = 0$.

Mais, voyons à quelles hypothèses correspondent réellement ces formules. L'équation en x s'écrit :

$$\frac{d(v \cos \tau)}{dt} = - cF(v) \cos \tau$$

ou

$$\cos \tau \frac{dv}{dt} - v \sin \tau \frac{d\tau}{dt} = - cF \cos \tau$$

ou encore à un terme du troisième ordre près.

$$\frac{dv}{dt} = - cF - g \sin \tau.$$

Pour qu'on puisse négliger le terme $g \sin \tau$ devant cF, il faut que $g \sin \tau$ soit très petit par rapport à cF.

Dans l'autre équation

$$\frac{d^2y}{dt^2} = - g - cF \sin \tau,$$

pour qu'on puisse négliger le second terme du deuxième membre, il faut que $cF \sin \tau$ soit très petit par rapport à g. Ce sont là des conditions contradictoires en général, hors le cas d'une extrême petitesse de $\sin \tau$.

Les formules de Sladen ne sont donc applicables que dans l'hypothèse où on a vérifié, sur toute l'étendue de la trajectoire : 1° que $g \sin \tau$ est négligeable devant $cF(v)$, 2° que $cF \sin \tau$ est négligeable devant g.

On aurait alors :

Sommet.	*Point de chute.*
$T_s = \frac{V_0 \sin\alpha}{g}$	$T = 2\frac{V_0 \sin\alpha}{g} = 2T_s$
$Y_s = V_0 T_s \sin\alpha - \frac{1}{2} g T_s^2$	$V_\omega \sin\omega = - V_0 \sin\alpha$
$\mathbf{S}_s = \mathbf{S}_0 + cT_s$	$\mathbf{S}_\omega = \mathbf{S}_0 + cT = 2\mathbf{S}_s - \mathbf{S}_0$
$X_s = \frac{\mathbf{D}_s - \mathbf{D}_0}{c}$	$X = \frac{\mathbf{D}_\omega - \mathbf{D}_0}{c}$

§ 2. — Les fonctions secondaires

258. **Définition**. — Les équations du tir de plein fouet, soit sous la forme donnée au Chapitre IX, soit sous la forme donnée au paragraphe précédent, permettent la résolution, plus ou moins directe et facile des problèmes de tir par les méthodes exposées aux § 2 et 3 et au moyen de *tables à simple entrée* des fonctions balistiques de Siacci **J**, **S**, **D** et **A**.

Mais, on peut donner à la solution des problèmes de tir le maximum de simplicité qu'elle comporte, par l'emploi de *tables à double entrée*, calculées d'avance et auxquelles nous donnons le nom général de *fonctions secondaires*. De telles tables, indiquées d'abord par Didion dans un cas particulier, puis par Siacci dans le cas général ont été calculées par différents auteurs, Braccialini, Parodi, de la Llave, etc. Nous donnerons ici la théorie générale de ces tables.

259. **Première espèce de fonctions secondaires** ($\mathbf{u}_0$, $\mathbf{u}$). — Nous avons rencontré un problème (calcul

de X, connaissant V_0, α, et c) (231) où une table à double entrée de la fonction $\frac{\mathbf{A}_\omega - \mathbf{A}_0}{\mathbf{D}_\omega - \mathbf{D}_0}$ des deux variables u_0 et u_ω aurait permis la solution immédiate du problème. On peut généraliser la solution ; écrivons à cet effet les équations du tir de plein fouet (219) de la manière suivante, pour un point quelconque de la trajectoire.

$$\begin{aligned} c\,(\operatorname{tg}\tau - \operatorname{tg}\alpha) &= \mathbf{J}_0 - \mathbf{J} &&= \mathscr{B}_{\mathbf{J}}(u_0, u) \\ cx &= \mathbf{D} - \mathbf{D}_0 &&= \mathscr{B}_{\mathbf{D}}(u_0, u) \\ ct &= \mathbf{S} - \mathbf{S}_0 &&= \mathscr{B}_{\mathbf{S}}(u_0, u) \\ c\left(\operatorname{tg}\alpha - \frac{y}{x}\right) &= \frac{\mathbf{A} - \mathbf{A}_0}{\mathbf{D} - \mathbf{D}_0} - \mathbf{J}_0 &&= \mathscr{B}_{\mathbf{A}}(u_0, u) \end{aligned}$$

Si donc on a calculé les tables des quatre fonctions $\mathscr{B}_{\mathbf{J}}$, $\mathscr{B}_{\mathbf{D}}$, $\mathscr{B}_{\mathbf{S}}$, $\mathscr{B}_{\mathbf{A}}$, dont on a l'expression en fonction des quatre fonctions $\mathbf{J}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{S}$ et $\mathbf{A}$, on pourra facilement résoudre les problèmes de tir.

Ainsi, en faisant $y = 0$, dans la dernière, la fonction $\mathscr{B}_{\mathbf{A}}(u_0, u_\omega)$ se rapportera au point de chute ; de même la première en y faisant $\tau = 0$ se rapportera au sommet.

En réalité la dernière table, celle de la fonction $\mathscr{B}_{\mathbf{A}}$ $\left(\text{ou celle de la fonction } \frac{\mathbf{A}_\omega - \mathbf{A}_0}{\mathbf{D}_\omega - \mathbf{D}_0}\right)$ est la seule qui serait utile ; car les autres éléments sont donnés par des formules extrêmement simples. D'autre part, à moins d'avoir une étendue considérable, les tables des fonctions secondaires obligent à une interpolation double, opération qui n'est point toujours suffisamment précise.

260. Seconde espèce de fonctions secondaires (u_0, cx). — Une fois les tables précédentes calculées avec leur double argument u_0 et u, il est possible d'en déduire d'autres tables à double entrée, donnant d'autres fonctions secondaires ; on peut prendre en effet, comme variable dans $\mathcal{L}_J$, $\mathcal{L}_D$ etc., au lieu de u, une des quantités du premier membre, et on aura ainsi quatre nouvelles espèces de fonctions balistiques ayant comme variables u_0 et $c\,(\operatorname{tg}\tau - \operatorname{tg}\alpha)$, u_0 et cx, u_0 et ct, u_0 et $c\left(\operatorname{tg}\alpha - \frac{y}{x}\right)$.

Cette opération revient simplement à un changement d'argument : on construira par exemple les courbes de cx en fonction de u_0 et u, pour des valeurs de cx en progression arithmétique ; on les coupera par une parallèle à l'axe des u et ce sont les valeurs de u ainsi trouvées qui figureront dans la table ayant maintenant comme argument u_0 et cx.

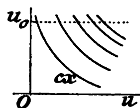


Fig. 76.

En pratique, parmi les quatre espèces de fonctions secondaires qu'on peut considérer, la seule qui ait donné lieu à la confection de tables numériques est celle où les variables sont u_0 et cx ; on a ainsi :

$$c\,(\operatorname{tg}\tau - \operatorname{tg}\alpha) = Q_J(u_0, cx)$$
$$u = Q_D(u_0, cx)$$
$$ct = Q_S(u_0, cx)$$
$$c\left(\operatorname{tg}\alpha - \frac{y}{x}\right) = Q_A(u_0, cx).$$

261. Les facteurs de la trajectoire. — Le géné-

ral Didion et plus tard le général Mayewski, avaient, dans des cas particuliers (261-262) donné leurs formules de tir sous la forme précédente de fonctions des deux variables u_0 et cx ; mais ils les avaient transformées de manière à ce qu'elles ne diffèrent des équations du vide, avec la variable x (19), que par une fonction de u_0 et cx. Ils écrivaient ainsi :

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2u_0^2} \mathcal{G}_{\mathbf{A}}(u_0, cx) \qquad \text{ce qui est l'équation de la trajectoire}$$

$$\operatorname{tg} \tau = \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx}{u_0^2} \mathcal{G}_{\mathbf{J}}(u_0, cx)$$

$$u = u_0 \mathcal{G}_{\mathbf{D}}(u_0, cx)$$

$$t = \frac{x}{u_0} \mathcal{G}_{\mathbf{S}}(u_0, cx)$$

On donne aux fonctions $\mathcal{G}$ le nom de *facteurs de la trajectoire* et Siacci s'est proposé le problème d'exprimer, dans le cas général, ces facteurs au moyen des fonctions balistiques du tir de plein fouet. Voici l'analyse qu'il emploie.

Posons tout d'abord $cx = x'$. On a

$$\mathbf{D}(u) = \mathbf{D}_0 + x'.$$

Prenons comme variable $(\mathbf{D}_0 + x')$ et exprimons les autres fonctions balistiques au moyen de cette variable. On pourra écrire :

$$u = \overline{\mathrm{D}}(\mathbf{D}_0 + x')$$
$$\mathbf{J}(u) = \overline{\mathrm{J}}(\mathbf{D}_0 + x')$$
$$\mathbf{S}(u) = \overline{\mathrm{S}}(\mathbf{D}_0 + x')$$
$$\mathbf{A}(u) = \overline{\mathrm{A}}(\mathbf{D}_0 + x')$$

Les notations $\overline{D}$, $\overline{J}$, $\overline{S}$ et $\overline{A}$ indiquant quatre fonctions de la variable $(\mathbf{D}_0 + x')$.

Prenant les dérivées, par rapport à x', on aura :

$$\overline{J}' = \frac{d\mathbf{J}}{d\mathbf{D}}\,\frac{d\mathbf{D}}{dx'};\ \overline{S}' = \frac{d\mathbf{S}}{d\mathbf{D}}\,\frac{d\mathbf{D}}{dx'};\ \overline{A}' = \frac{d\mathbf{A}}{d\mathbf{D}}\,\frac{d\mathbf{D}}{dx'}$$

Mais $$\frac{d\mathbf{D}}{dx'} = 1.$$

D'autre part, d'après les définitions des fonctions balistiques :

$$\frac{d\mathbf{J}}{d\mathbf{D}} = \frac{g}{u^2},\qquad \frac{d\mathbf{S}}{d\mathbf{D}} = \frac{1}{u},\qquad \frac{d\mathbf{A}}{d\mathbf{D}} = \mathbf{J}.$$

On a donc :

$$\overline{J}'(\mathbf{D}_0 + x') = \overline{A}''(\mathbf{D}_0 + x') = \frac{g}{u^2}$$

$$\overline{S}'(\mathbf{D}_0 + x') = \frac{1}{u}$$

$$\overline{A}'(\mathbf{D}_0 + x') = \mathbf{J}(u) = \overline{J}(\mathbf{D}_0 + x')$$

En plus, on doit remarquer qu'à l'origine :

$$\mathbf{A}_0 = \overline{A}(\mathbf{D}_0),\ \ \mathbf{J}_0 = \overline{A}'(\mathbf{D}_0) = \overline{J}(\mathbf{D}_0),\ \ \overline{J}'(\mathbf{D}_0) = \overline{A}''(\mathbf{D}_0) = \frac{g}{u_0^2}$$

$$\mathbf{S}_0 = \overline{S}(\mathbf{D}_0),\ \ \overline{S}'(\mathbf{D}_0) = \frac{1}{u_0},\qquad u_0 = \overline{D}(\mathbf{D}_0).$$

Ecrivons maintenant les équations du tir de plein fouet (215) de la manière suivante :

$$\operatorname{tg}\tau = \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx}{u_0^2}\left(\frac{\mathbf{J} - \mathbf{J}_0}{gcx}\,u_0^2\right)$$

$$t = \frac{x}{u_0}\left(\frac{\mathbf{S} - \mathbf{S}_0}{cx}\,u_0\right)$$

$$y = x\operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2u_0^2}\left(\frac{\mathbf{A} - \mathbf{A}_0 - \mathbf{J}_0(\mathbf{D} - \mathbf{D}_0)}{(cx^2)}\cdot\frac{2u_0^2}{g}\right)$$

Mais, on a exprimé ci-dessus tous les termes qui figurent entre parenthèses au moyen des fonctions de $(\mathbf{D}_0 + x')$ et on peut écrire :

$$\operatorname{tg}\tau = \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx}{u_0^2}\frac{\overline{\mathrm{J}}(\mathbf{D}_0+x') - \overline{\mathrm{J}}(\mathbf{D}_0)}{x'\,\overline{\mathrm{J}}'(\mathbf{D}_0)} = \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx}{u_0^2}\mathcal{G}_{\mathrm{J}}(u_0, x')$$

$$t = \frac{x}{u_0}\frac{\overline{\mathrm{S}}(\mathbf{D}_0+x') - \overline{\mathrm{S}}(\mathbf{D}_0)}{x'\,\overline{\mathrm{S}}'(\mathbf{D}_0)} = \frac{x}{u_0}\mathcal{G}_{\mathrm{S}}(u_0, x')$$

$$y = x\operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2u_0^2}\frac{\overline{\mathrm{A}}(\mathbf{D}_0+x') - \overline{\mathrm{A}}(\mathbf{D}_0) - x'\,\overline{\mathrm{A}}'(\mathbf{D}_0)}{\frac{x'^2}{2}\overline{\mathrm{A}}''(\mathbf{D}_0)}$$

$$= x\operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2u_0^2}\mathcal{G}_{\mathrm{A}}(u_0, x')$$

$$u = u_0\frac{\overline{\mathrm{D}}(\mathbf{D}_0+x')}{\overline{\mathrm{D}}(\mathbf{D}_0)} = u_0\,\mathcal{G}_{\mathrm{D}}(u_0, x').$$

On peut remarquer la forme curieuse des facteurs de la trajectoire qui apparaissent comme disposés pour leur développement par la série de Taylor.

On a ainsi, par ces formules, l'expression générale des facteurs $\mathcal{G}$ de la trajectoire de plein fouet. Dans le cas général d'une trajectoire quelconque les facteurs de la trajectoire dépendent des trois variables V_0, α et x' (141) ; la simplification que l'hypothèse du tir de plein fouet apporte dans les équations est donc de réduire ces trois variables à deux, savoir $u_0 = \mathrm{V}_0 \cos\alpha$ et x'.

Les facteurs de la trajectoire peuvent encore s'exprimer sous forme d'intégrales, en fonction de la quantité $\overline{\mathrm{D}}(\mathbf{D}_0 + x')$ qui est telle que $u = \overline{\mathrm{D}}(\mathbf{D}_0 + x')$.

On a en effet :

$$\operatorname{tg}\tau = \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx}{u_0^2} \times \frac{u_0^2}{x'} \int_0^{x'} \frac{dx'}{\overline{D}^2}$$

$$t = \frac{x}{u_0} \times \frac{u_0}{x'} \int_0^{x'} \frac{dx'}{\overline{D}}$$

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2u_0^2} \times \frac{2u_0^2}{x'^2} \int_0^{x'} dx' \int_0^{x'} \frac{dx'}{\overline{D}^2}$$

$$u = u_0 \times \frac{\overline{D}}{u_0}$$

Les fonctions à droite des signes $\times$ ne renferment que les deux variables u_0 et x' : ce sont les facteurs $\mathcal{G}$ de la trajectoire.

262. **Première application. Calcul des facteurs de la trajectoire [de Saint-Robert et Mayewski].** — De Saint-Robert avait adopté comme loi de résistance la fonction

$$F(v) = av^2(1 + bv^2).$$

Cherchons dans cette hypothèse l'expression des facteurs de la trajectoire.

1° Il faut tout d'abord calculer la fonction $\overline{D}$, telle que $u = D(\overline{\mathbf{D}}_0 + x')$.

Or, la relation qui relie x et u est donnée par l'intégrale $cx = -\int_{u_0}^{u} \frac{udu}{F(u)}$ ce qui dans l'hypothèse ci-dessus s'écrira :

$$cx = -\int_{u_0}^{u} \frac{du}{au(1 + bu^2)}$$

Posant maintenant $acx = x'$, il viendra :

$$x' = -\int_{u_0}^{u} \frac{du}{u(1 + bu^2)} = -\int_{u_0}^{u} \left(\frac{1}{u} - \frac{bu}{1 + bu^2}\right) du.$$

Et intégrant, on obtient :

$$x' = -\operatorname{Log}\frac{u}{u_0} + \frac{1}{2}\operatorname{Log}\frac{1+bu^2}{1+bu_0^2}$$

ou bien

$$x' = \frac{1}{2}\operatorname{Log}\frac{u_0^2}{u^2}\,\frac{1+bu^2}{1+bu_0^2}$$

On en déduira, par un calcul aisé, l'expression de u en fonction de x' qui est

$$u = \frac{u_0}{\sqrt{(1+bu_0^2)\,e^{2x'} - bu_0^2}} = u_0\left(\frac{\overline{D}}{u_0}\right)$$

2° *Calcul de* $\displaystyle\int_0^{x'}\frac{dx'}{\overline{D}^2}$

On a :

$$\int_0^{x'}\frac{dx'}{\overline{D}^2} = \frac{1}{u_0^2}\int_0^{x'}[(1+bu_0^2)\,e^{2x'} - bu_0^2]\,dx'$$

d'où :

$$\int_0^{x'}\frac{dx'}{\overline{D}^2} = \frac{1}{u_0^2}\left[\frac{1}{2}(1+bu_0^2)(e^{2x'}-1) - bu_0^2\,x'\right].$$

3° *Calcul de* $\displaystyle\int_0^{x'}dx'\int_0^{x'}\frac{dx'}{\overline{D}^2}$.

On a :

$$\int_0^{x'}dx'\int_0^{x'}\frac{dx'}{\overline{D}^2} = \frac{1}{u_0^2}\int_0^{x}\left(\frac{1}{2}(1+bu_0^2)(e^{2x'}-1) - bu_0^2 x'\right)dx'$$

$$= \frac{1}{2\,u_0^2}\left[\frac{1+bu_0^2}{2}(e^{2x'} - 2\,x' - 1) - bu_0^2\,x'^2\right]$$

4° *Calcul de* $\displaystyle\int_0^{x'}\frac{dx'}{\overline{D}}$

on a :

$$\int_0^{x'}\frac{dx'}{\overline{D}} = \frac{1}{u_0}\int_0^{x'}\sqrt{(1+bu_0^2)\,e^{2x'} - bu_0^2}\,dx'$$

Mais cette intégrale ne paraît pas pouvoir s'obtenir simplement ; on procède par l'intégration directe de la fonction balistique $S = -\int \frac{du}{F(u)}$

On a en effet :

$$ct = -\int_{u_0}^{u} \frac{du}{F(u)} = -\int_{u_0}^{u} \frac{du}{au^2(1 + bu^2)}$$

d'où

$$act = -\int_{u_0}^{u} \left(\frac{1}{u^2} - \frac{b}{1 + bu^2}\right) du$$

$$= \frac{1}{u} - \frac{1}{u_0} - \sqrt{b}\left(\text{arc tg } u_0\sqrt{b} - \text{arc tg } u\sqrt{b}\right).$$

Remplaçant maintenant u par sa valeur en fonction de u_0 et x', il viendra :

$$t = \frac{x}{u_0}\frac{1}{x'}\left[\sqrt{(1 + bu_0^2)e^{2x'} - bu_0^2} - 1 - u_0\sqrt{b}\left(\text{arc tg } u_0\sqrt{b} - \text{arc tg } \frac{u_0\sqrt{b}}{\sqrt{(1 + bu_0^2)e^{2x'} - bu_0^2}}\right)\right]$$

5° En résumé, les facteurs $\mathcal{G}$ de la trajectoire dans l'hypothèse $F(v) = av^2(1 + bv^2)$ ont les valeurs suivantes :

$$\mathcal{G}_A(bu_0^2, 2x') = \frac{(1 + bu_0^2)(e^{2x'} - 2x' - 1)}{2x'^2} - bu_0^2$$

$$\mathcal{G}_J(bu_0^2, 2x') = \frac{(1 + bu_0^2)(e^{2x'} - 1)}{2x'} - bu_0^2$$

$$\mathcal{G}_D(bu_0^2, 2x') = \frac{1}{\sqrt{(1 + bu_0^2)e^{2x'} - bu_0^2}}$$

$$\mathcal{G}_S(bu_0^2, 2x') = \frac{1}{x'}$$

$$\left[\sqrt{(1 + bu_0^2)e^{2x'} - bu_0^2} - 1 - u_0\sqrt{b}\left(\text{arc tg } u_0\sqrt{b} - \text{arc tg } \frac{u_0\sqrt{b}}{(\sqrt{1 + bu_0^2)e^{2x'} - bu_0^2}}\right)\right]$$

Les quatre facteurs de la trajectoire sont exprimés en fonction des deux variables bu_0^2 et $2x'$. Aux notations près, ce sont les fonctions $\mathscr{B}(z, V_0^2)$, $\mathscr{J}(z, V_0^2)$, $\mathscr{V}(z, V_0^2)$, $\mathscr{T}(z, V_0^2)$, dont le général Mayewski dans son *Traité de Balistique* a calculé les tables numériques et pour lesquelles il pose :

$$z = 2x', \; V_0^2 = bu_0^2,$$

263. **Deuxième application. — Calcul des facteurs de la trajectoire Didion. —** Le général Didion adopte comme loi de résistance de l'air

$$F(v) = av^2(1 + bv).$$

Posons encore $acx = x'$, on obtiendra par un procédé de calcul analogue à celui employé au numéro précédent les valeurs suivantes des facteurs de la trajectoire :

$$\mathcal{G}_A(bu_0, x') = (1 + bu_0)^2 \frac{e^{2x'} - 2x' - 1}{2x'^2} - 4(1 + bu_0)bu_0 \frac{e^{x'} - x' - 1}{x'^2} + b^2u_0^2$$

$$\mathcal{G}_J(bu_0, x') = (1 + bu_0)^2 \frac{e^{2x'} - 1}{2x'} - 2(1 + bu_0)bu_0 \frac{e^{x'} - 1}{x'} + b^2u_0^2$$

$$\mathcal{G}_D(bu_0, x') = (1 + bu_0) \frac{e^{x'} - 1}{x'} - bu_0$$

$$\mathcal{G}_S(bu_0, x') = \frac{1}{(1 + bu_0)e^{x'} - bu_0}$$

Les tables des quatre fonctions $\mathcal{G}(bu_0, x')$ se trouvent dans le *Traité de Balistique* du général Didion, aux notations près. Les variables de Didion sont $\frac{iV_1}{r} = bu_0$, $ix = x'$, i étant un coefficient arbitraire ; il pose alors :

$$\mathcal{G}_A = \mathscr{B} \; ; \; \mathcal{G}_J = \mathscr{J} \; ; \; \mathcal{G}_S = \mathscr{V} \; ; \; \mathcal{G}_D = \mathscr{D}.$$

264. **Cas de F(v) = av².** — En faisant $b = 0$, aussi bien dans les formules du général Mayewski que dans celles du général Didion, on trouve les facteurs de la trajectoire pour une résistance quadratique :

$$\mathcal{G}_{A}(x') = \frac{e^{2x'} - 2x' - 1}{2x'^2}$$

$$\mathcal{G}_{J}(x') = \frac{e^{2x'} - 1}{2x'}$$

$$\mathcal{G}_{D}(x') = e^{-x'}$$

$$\mathcal{G}_{S}(x') = \frac{e^{x'} - 1}{x'}$$

Dans ces formules, $x' = acx$ ou suivant la notation ordinaire $x' = b_2 x$.

Il existe des tables numériques de ces facteurs de la trajectoire; mais, ainsi qu'on le voit, ces tables sont maintenant à *simple entrée*, la variable u_0 n'y figurant plus.

265. **Facteurs de tir.** — Siacci a dénommé *facteurs de tir* certains rapports qui lient entre eux les éléments du point de chute ou du sommet de la trajectoire.

Il a, en particulier, considéré les suivants, qui sont désignés ici par la notation qu'il a adoptée :

$$\mathbf{f} = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{gX}\,; \qquad \mathbf{f}_1 = \frac{\operatorname{tg}\omega}{\operatorname{tg}\alpha}\,; \qquad \mathbf{f}_2 = \frac{T}{\sqrt{X \operatorname{tg}\alpha}}\,.$$

$$\mathbf{f}_3 = \frac{u_0}{u_\omega}\,; \qquad \mathbf{f}_4 = \frac{X_s}{X}\,; \qquad \mathbf{f}_5 = \frac{Y_s}{X \operatorname{tg}\alpha}\,.$$

Il est facile de trouver l'expression de ces *facteurs de tir*, en fonction des *facteurs de la trajectoire* (260).

On a en effet :

$$\mathbf{f} = \mathcal{G}_{A}(u_0, cX), \quad \mathbf{f}_1 = 1 - \frac{2}{\mathbf{f}}\mathcal{G}_{J}(u_0, cX), \quad \mathbf{f}_2 = \sqrt{\frac{2}{g}}\frac{1}{\sqrt{\mathbf{f}}}\mathcal{G}_{S}(u_0, cX)$$

$$\mathbf{f}_3 = \frac{1}{\mathcal{G}_{D}(u_0, cX)}, \quad \mathbf{f}_4 = \frac{1}{2}\,\mathbf{f}\,\mathcal{G}_{J}(u_0, cX_s), \quad \mathbf{f}_5 = \mathbf{f}_4 - \frac{\mathbf{f}_4^2}{\mathbf{f}}\mathcal{G}_{A}(u_0, cX_s)$$

La connaissance d'un des facteurs $\mathcal{G}$ détermine tous les autres, à condition qu'on connaisse, en outre, soit u_0, soit cX. Le facteur de la trajectoire $\mathcal{G}_J(u_0, cX_s)$ relatif au sommet est lié au facteur $\mathcal{G}_A(u_0, cX)$ du point de chute par la relation

$$2X_s\,\mathcal{G}_J(u_0, cX_s) = X\mathcal{G}_A(u_0, cX)$$

ce qui au moyen d'une table à double entrée (cX et u_0) permet le calcul de X_s et $\mathcal{G}_J(u_0, cX_s)$.

266. **Exercices**. — (D'après Siacci.)

1° Démontrer que soit pour la résistance cubique, soit pour la résistance biquadratique, en désignant par τ' l'inclinaison du point d'abscisse $\frac{X}{2}$, on a :

$$\operatorname{tg}\tau' = \frac{1}{4}(\operatorname{tg}\omega - \operatorname{tg}\alpha).$$

2° Démontrer que quand la résistance suit l'une des deux lois précédentes, en désignant par u' la vitesse horizontale à la distance $\frac{X}{2}$, on a :

$$y = x\operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{6V_0^2\cos^2\alpha}\left[1 + 2\left(\frac{V_0}{u'}\right)^2\right].$$

3° Démontrer que dans le cas de la loi biquadratique, l'équation de la trajectoire est

$$y = \frac{x(X-x)\,[x\operatorname{tg}\omega + (X-x)\operatorname{tg}\alpha]}{X^2}.$$

4° Démontrer que cette trajectoire partage par moitié la surface comprise entre les deux paraboles donnant la même portée et ayant pour inclinaisons extrêmes, la première α, la seconde ω.

5° Démontrer qu'on a au point de chute

$$1 + \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\omega} = -cX\frac{\mathcal{G}'_A}{\mathcal{G}_A}$$

[différentier l'équation de la trajectoire du n° 260, qui donne $\operatorname{tg}\tau$; fait $x = X$ et $\tau = \omega$]. En déduire la formule du n° 247

$$\frac{dX}{X} = -\left(1 + \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\omega}\right)\frac{\partial c}{c}$$

§ 3. — Cas de $F(v) = B_n v^n$

267. **Usage de cette hypothèse**. — Si on suppose que, grâce au choix particulier de la fonction $F(v)$, les diverses fonctions balistiques **J**, **S**, **D** et **A** soient intégrables en termes finis, on pourra exprimer tous les éléments de la trajectoire de plein fouet sous forme de relations explicites où u sera la variable indépendante.

C'est ce qui se présente en particulier dans le cas où la fonction $F(v)$ peut être mise sous la forme $B_n v^n$. En général, la fonction $F(v)$ expérimentale est telle que cette représentation ne peut être permise que sur des arcs de trajectoires peu étendus, et pour lesquels on déterminera les valeurs convenables de B_n et de n, qui varient suivant la région des vitesses que l'on considère.

Quoi qu'on puisse penser de l'application pratique de l'hypothèse $F(v) = B_n v^n$, il est utile de faire connaître les formules auxquelles on arrive. Elles ont, en effet, servi de base à de nombreux travaux sur la Balistique, et ont été employées souvent pour résoudre les problèmes de tir; elles peuvent d'ailleurs trouver encore, dans certaines questions, un emploi très légitime.

268. **Intégrales des fonctions balistiques**. — Faisant $F(u) = B_n u^n$ dans les formules de définition des fonctions balistiques (219) et prenant $U = \infty$ pour limite des intégrales, on aura :

$$(u) = -\int_{\infty}^{u} g\,\frac{du}{u\mathrm{F}} = -\frac{g}{\mathrm{B_n}}\int_{\infty}^{u}\frac{du}{u^{n+1}} = \frac{g}{n\mathrm{B_n}}\,\frac{1}{u^{n}}$$

$$(u) = -\int_{\infty}^{u} \frac{du}{\mathrm{F}} = -\frac{1}{\mathrm{B_n}}\int_{\infty}^{u}\frac{du}{u^{n}} = \frac{1}{(n-1)\mathrm{B_n}}\,\frac{1}{u^{n-1}}$$

$$(u) = -\int_{\infty}^{u} \frac{u\,du}{\mathrm{F}} = -\frac{1}{\mathrm{B_n}}\int_{\infty}^{u}\frac{du}{u^{n-1}} = \frac{1}{(n-2)\mathrm{B_n}}\,\frac{1}{u^{n-2}}$$

$$(u) = -\int_{\infty}^{u} \mathrm{J}\,\frac{u\,du}{\mathrm{F}} = -\frac{g}{n\mathrm{B_n^2}}\int_{\infty}^{u}\frac{du}{u^{2n-1}} = \frac{g}{n(2n-2)\mathrm{B_n^2}}\,\frac{1}{u^{2n-2}}$$

269. Éléments d'un point quelconque. Variable u. — Portons ces valeurs dans les équations générales de Siacci (252). Les deux coefficients $\cos\lambda$ et $\cos\mu$ sortent des fonctions balistiques de manière à n'en plus constituer qu'un seul $\dfrac{\cos\lambda}{\cos^n\mu}$.

Posons :

$$c' = c\,\frac{\cos\lambda}{\cos^n\mu}\,\mathrm{B_n}.$$

On aura :

$$\mathrm{tg}\,\tau = \mathrm{tg}\,\alpha - \frac{g}{c'}\,\frac{1}{nu_0^n}\left[\left(\frac{u_0}{u}\right)^n - 1\right]$$

$$t = \frac{1}{c'}\,\frac{1}{(n-1)u_0^{n-1}}\left[\left(\frac{u_0}{u}\right)^{n-1} - 1\right]$$

$$x = \frac{1}{c'}\,\frac{1}{(n-2)u_0^{n-2}}\left[\left(\frac{u_0}{u}\right)^{n-2} - 1\right]$$

$$y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{g}{c'^2}\,\frac{1}{nu_0^{2n-2}}\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{2n-2}\left[\left(\dfrac{u_0}{u}\right)^{2n-2} - 1\right] \\ -\dfrac{1}{n-2}\left[\left(\dfrac{u_0}{u}\right)^{n-2} - 1\right]\end{array}\right]$$

On voit que les *fonctions secondaires* $\mathcal{L}_\mathrm{J}$, $\mathcal{L}_\mathrm{D}$, $\mathcal{L}_\mathrm{S}$, $\mathcal{L}_\mathrm{A}$

du n° 258 qui, dans le cas général, dépendent des deux variables u et u_0, ne dépendent plus ici que du rapport $\left(\frac{u_0}{u}\right)$. Elles nécessiteront donc seulement, pour chacune d'elles, une table à simple entrée.

Prenant pour variable $\frac{u}{u_0} = \varphi$, l'argument de la table serait le rapport φ. Elle comprendrait cinq autres colonnes dont les en-têtes sont les premiers membres des équations ci-dessous et qui ont les valeurs indiquées dans le second membre en fonction de φ :

1) $\frac{u}{u_0} = \varphi$

2) $nc' \frac{u_0^n}{g} (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \tau) = \varphi^{-n} - 1$

3) $(n - 1)\, c'\, u_0^{n-1}\, t = \varphi^{1-n} - 1$

4) $(n - 2)\, c'\, u_0^{n-2}\, x = \varphi^{2-n} - 1$

5) $$\frac{n(2n - 2)}{n - 2} c' \frac{u_0^n}{g} \left(\operatorname{tg} \alpha - \frac{y}{x}\right) = (\varphi^{2-n} - 1)^{-1} \left[\varphi^{2-2n} - 1 - \frac{2n - 2}{n - 2} (\varphi^{2-n} - 1)\right].$$

De telles tables, les plus générales qu'on puisse construire dans le cas de $F(v) = B_n v^n$, permettront de résoudre immédiatement tous les problèmes de tir. Ainsi, pour avoir la portée X, connaissant les éléments à l'origine, on formera le produit $\frac{n(2n - 2)}{n - 2} c' \frac{u_0^n}{g} \operatorname{tg} \alpha$ et entrant dans la table par la colonne 5, on trouvera sur la ligne où la valeur du produit est inscrite, la valeur des quantités qui figurent dans les en-têtes des autres colonnes.

270. **Facteurs de la trajectoire.** — Comme toutes les équations précédentes, à l'exception de la dernière, sont immédiatement résolubles par rapport à u, on pourra prendre, comme variable indépendante, une des trois quantités x, t ou $(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \tau)$.

Si on prend x, on arrivera aux équations écrites au n° 260 pour le cas général. Ici les fonctions $\mathcal{G}$ ne dépendent plus de deux variables indépendantes u_0 et cx, mais d'une seule qui est

$$\mathfrak{z} = c' u_0^{n-2} x,$$

et on aura

$$1) \qquad \operatorname{tg} \tau = \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx}{u_0^2} \mathcal{G}_J(\mathfrak{z})$$

avec $$\mathcal{G}_J(\mathfrak{z}) = \frac{1}{n\mathfrak{z}} \left[(1 + (n-2)\mathfrak{z})^{\frac{n}{n-2}} - 1 \right];$$

$$2) \qquad t = \frac{x}{u_0} \mathcal{G}_S(\mathfrak{z})$$

avec $$\mathcal{G}_S(\mathfrak{z}) = \frac{1}{(n-1)\mathfrak{z}} \left[(1 + (n-2)\mathfrak{z})^{\frac{n-1}{n-2}} - 1 \right];$$

$$3) \qquad y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2u_0^2} \mathcal{G}_A(\mathfrak{z})$$

avec

$$\mathcal{G}_A(\mathfrak{z}) = \frac{1}{n(n-1)\mathfrak{z}^2} \left[(1 + (n-2)\mathfrak{z})^{\frac{2n-2}{n-2}} - 1 - 2(n-1)\mathfrak{z} \right];$$

$$4) \qquad u = u_0 \mathcal{G}_D(\mathfrak{z})$$

avec $$\mathcal{G}_D(\mathfrak{z}) = \frac{1}{[1 + (n-2)\mathfrak{z}]^{\frac{1}{n-2}}}.$$

271. **Choix du coefficient de Siacci.** — En remplaçant c' par sa valeur (268) on aura :

$$\mathfrak{z} = cx \frac{\cos \lambda}{\cos^n \mu} B_n V_0^{n-2} \cos^{n-2} \alpha.$$

Nous avons vu (253) que, à un terme du troisième ordre près, il était indifférent, entre certaines limites, de choisir telle ou telle valeur pour λ et μ.

Or, les équations ci-dessus acquerreront leur maximum de simplicité lorsque les fonctions $\mathcal{G}$ ne dépendront pas de l'angle de projection.

Il suffira de prendre à cet effet :

$$\frac{\cos\lambda}{\cos^{n}\mu}\cos^{n-2}\alpha = 1,$$

d'où

$$\frac{\cos\lambda}{\cos^{n}\mu} = \cos^{n-2}\alpha\,;$$

$\mathfrak{z}$ devient alors $\mathfrak{z} = c\mathrm{B}_n \mathrm{V}_0^{n-2}x.$

272. **Application à diverses valeurs de n.** — Pour différentes valeurs de n, les facteurs $\mathcal{G}$ de la trajectoire prennent les formes suivantes où la variable $\mathfrak{z}$ a pour expression

$$\mathfrak{z} = cx\frac{\cos\lambda}{\cos^{n}\mu}\mathrm{B}_n\mathrm{V}^{n-2}\cos^{n-2}\alpha.$$

$n =$		0
$\mathcal{G}_{\mathbf{J}}(\mathfrak{z}) = \frac{1}{n\mathfrak{z}}\left[(1+(n-2)\mathfrak{z})^{\frac{n}{n-2}} - 1\right]$	$=$	$-\frac{1}{2}\mathrm{Log}(1-2\mathfrak{z})$
$\mathcal{G}_{\mathbf{S}}(\mathfrak{z}) = \frac{1}{(n-1)\mathfrak{z}}\left[(1+(n-2)\mathfrak{z})^{\frac{n-1}{n-2}} - 1\right]$	$=$	$-\frac{1}{\mathfrak{z}}\left[(1-2\mathfrak{z})^{\frac{1}{2}} - 1\right]$
$\mathcal{G}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{z}) = \frac{1}{n(n-1)\mathfrak{z}^2}\left[(1+(n-2)\mathfrak{z})^{\frac{2n-2}{n-2}} - 1 - 2(n-1)\mathfrak{z}\right]$	$=$	$-\frac{2}{\mathfrak{z}^2}[(1-2\mathfrak{z})\mathrm{Log}(1-2\mathfrak{z})$
$\mathcal{G}_{\mathbf{D}}(\mathfrak{z}) = \frac{1}{[1+(n-2)\mathfrak{z}]^{\frac{1}{n-2}}}$	$=$	$(1-2\mathfrak{z})^{\frac{1}{2}}$

1° Pour les valeurs de n supérieures à deux, le calcul des valeurs des $\mathcal{G}(z)$ ne présente aucune difficulté. Le degré de la trajectoire est $\frac{2n-2}{n-2}$, ce qui donne les nombres suivants :

$$n = 3,\ 4,\ 5,\ 6\ldots\ldots$$
$$\text{degré} = 4,\ 3,\ \frac{8}{3},\ \frac{5}{2}\ldots\ldots$$

Pour $n = \infty$ (cas du vide) on a le degré 2. Pour des valeurs de n, inférieures à 3, la trajectoire est transcendante.

2° *Pour* $n = 2$, on remarque que, dans chacun des $\mathcal{G}(z)$, se trouve une expression de la forme

$$\left[1+(n-2)z\right]^{\frac{k}{n-2}} \text{ qu'on peut écrire } \left[\left[1+(n-2)z\right]^{\frac{1}{(n-2)z}}\right]^{kz}$$

Or, la limite du facteur $\left[1+(n-2)z\right]^{\frac{1}{(n-2)z}}$, pour $n = 2$, est le nombre e, et par suite la limite de chacune des expressions sera de la forme e^{kz}, k ayant les valeurs 2 pour $\mathcal{G}_J(z)$, 1 pour $\mathcal{G}_S(z)$, 2 pour $\mathcal{G}_A(z)$, 1 pour $\mathcal{G}_D(z)$.

1	2	3	4
$\frac{1}{1-z}$	$\frac{e^{2z}-1}{2z}$	$1+z+\frac{z^2}{3}$	$1+z$
$-z\ \text{Log}\,(1-z)$	$\frac{e^{z}-1}{z}$	$1+\frac{z}{2}$	$\frac{(1+2z)^{\frac{3}{2}}-1}{3z}$
$\left[1+\frac{\text{Log}\,(1-z)}{z}\right]$	$\frac{e^{2z}-1-2z}{2z^2}$	$1+\frac{2}{3}z+\frac{1}{6}z^2$	$1+\frac{2}{3}z$
$1-z$	e^{-z}	$\frac{1}{1+z}$	$(1+2z)^{-\frac{1}{2}}$

3° *Pour* $n = 1$, les formules du tir de plein fouet sont exactement les mêmes que les formules exactes du n° 195 à condition cependant de prendre $\cos \lambda = \cos \mu = 1$ et par suite $z = \frac{b_1 x}{u_0}$.

Etablir les formules en trouvant la vraie valeur des facteurs $\mathcal{G}_S$ et $\mathcal{G}_A$ pour $n = 1$.

273. Formules différentielles de la portée. — Quand on fait $y = 0$ dans les équations du n° 268, on obtient :

$$c' n \frac{u_0^n}{g}(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\omega) + 1 = \varphi^{-n}$$

$$c'(n-2)\, u_0^{n-2} X + 1 = \varphi^{2-n}$$

$$c'^2 n \frac{u_0^{2n-2}}{g} X \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2n-2}(\varphi^{2-n}\varphi^{-n} - 1) - \frac{1}{n-2}(\varphi^{2-n} - 1$$

En remplaçant dans le second membre de la dernière équation φ^{2-n} par sa valeur tirée de la deuxième équation, c'est-à-dire en fonction de X, et φ^{-n} par sa valeur tirée de la première équation, c'est-à-dire en fonction de $(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\omega)$, on arrive, après quelques réductions, à la formule

$$c' u_0^n [(n-2) \operatorname{tg}\omega + n \operatorname{tg}\alpha] X = u_0^2 (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\omega) - g X.$$

On peut faire l'application de cette équation aux formules différentielles du n° 249.

On trouve que

$$1 + Z = 1 + \frac{g X - u_0^2 \operatorname{tg}\alpha}{u_0^2 \operatorname{tg}\omega}$$

a pour valeur

$$- c' u_0^{n-2}\left[n - 2 + n \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\omega}\right] X$$

de sorte que, pour le cas de $F(v) = B_n v^n$, les formules différentielles sont les suivantes :

$$\partial X = -X\left(1 + \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\omega}\right)\frac{\partial c}{c}$$

$$\partial X = -\left(n - 2 + n\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\omega}\right)X\frac{\partial V_0}{V_0}$$

$$\partial X = -\left[\frac{X}{\operatorname{tg}\omega} + \left(n - 2 + n\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\omega}\right)X\operatorname{tg}\alpha\right]\partial\alpha.$$

Exercice. — Trouver directement ces équations en partant des formules des nos 268 ou 269.

Théorème sur l'angle de chute. — On a démontré que le facteur $(1 + Z)$ est toujours positif (250).

On a donc :

$$2 - n - n\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\omega} > 0.$$

Soit ω' la valeur absolue de l'angle de chute ; on aura :

$$2 - n + n\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\omega'} > 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\omega'} > \frac{n-2}{n}$$

et par suite

$$\operatorname{tg}\omega' < \frac{n\operatorname{tg}\alpha}{n-2}$$

Ainsi, l'angle de chute ω' satisfait toujours à la double inégalité

$$\operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}\omega' < \frac{n}{n-2}\operatorname{tg}\alpha.$$

Si $n \leq 2$, l'inégalité $2 - n - n\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\omega} > 0$ est satisfaite d'elle-même ; le théorème ne s'applique donc pas.

274. Résumé des formules de tir pour le cas d'une résistance monôme (tir de plein fouet).

n = 2

$$\mathfrak{z} = cB_2 \left(\frac{\cos\lambda}{\cos^2\mu}\right) x$$

ou $\mathfrak{z} = b_2 x$

Point quelconque

$$\begin{cases} u = u_0\, e^{-\mathfrak{z}} \\ t = \dfrac{x}{u_0}\dfrac{1}{\mathfrak{z}}(e^{\mathfrak{z}} - 1) \\ \operatorname{tg}\tau = \operatorname{tg}\alpha - \dfrac{gx}{u_0^2}\dfrac{1}{2\mathfrak{z}}(e^{2\mathfrak{z}} - 1) \\ y = x\operatorname{tg}\alpha - \dfrac{gx^2}{2u_0^2}\dfrac{1}{2\mathfrak{z}^2}(e^{2\mathfrak{z}} - 1 - 2\mathfrak{z}) \end{cases}$$

$\mathfrak{z} = b_2 X$

Point de chute

$$\begin{cases} \dfrac{u_\omega}{U_0} = e^{-\mathfrak{z}} \\ \dfrac{u_0 T}{X} = \dfrac{1}{\mathfrak{z}}(e^{\mathfrak{z}} - 1) \\ \dfrac{\operatorname{tg}\omega}{\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{gX}{V_0^2 \sin 2\alpha}\dfrac{1}{\mathfrak{z}}(e^{2\mathfrak{z}} - 1) - 1 \\ \dfrac{V_0^2\sin 2\alpha}{gX} = \dfrac{1}{2\mathfrak{z}^2}(e^{2\mathfrak{z}} - 1 - 2\mathfrak{z}) \end{cases}$$

n = 3

$$\mathfrak{z} = cB_3 \left(\frac{\cos\lambda\cos\alpha}{\cos^3\mu}\right) V_0\, x$$

ou $\mathfrak{z} = b_3 V_0 x$

Point quelconque

$$\begin{cases} u = u_0 \dfrac{1}{1 + \mathfrak{z}} \\ t = \dfrac{x}{u_0}\left(1 + \dfrac{1}{2}\mathfrak{z}\right) \\ \operatorname{tg}\tau = \operatorname{tg}\alpha - \dfrac{gx}{u_0^2}\left(1 + \mathfrak{z} + \dfrac{1}{3}\mathfrak{z}^2\right) \\ y = x\operatorname{tg}\alpha - \dfrac{gx^2}{2u_0^2}\left(1 + \dfrac{2}{3}\mathfrak{z} + \dfrac{1}{6}\mathfrak{z}^2\right) \end{cases}$$

Point de chute

$$\left\{\begin{aligned} \frac{u_\omega}{u_0} &= \frac{1}{1+\mathfrak{z}} \qquad \mathfrak{z} = b_3 V_0 X \\ \frac{u_0 T}{X} &= 1 + \frac{1}{2}\mathfrak{z} \\ \frac{\operatorname{tg}\omega}{\operatorname{tg}\alpha} &= \frac{gX}{V_0^2 \sin 2\alpha}\left(1 + \mathfrak{z} + \frac{1}{3}\mathfrak{z}^2\right) - 1 \\ \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{gX} &= 1 + \frac{2}{3}\mathfrak{z} + \frac{1}{6}\mathfrak{z}^2 \end{aligned}\right.$$

n = 4

$$\mathfrak{z} = cB_4\left(\frac{\cos\lambda\cos^2\alpha}{\cos^4\mu}\right)V_0^2 x$$

ou $\mathfrak{z} = b_4 V_0^2 x$

Point quelconque

$$\left\{\begin{aligned} u &= u_0 \frac{1}{(1+2\mathfrak{z})^{\frac{1}{2}}} \\ t &= \frac{x}{u_0}\frac{1}{3\mathfrak{z}}\left((1+2\mathfrak{z})^{\frac{3}{2}} - 1\right) \\ \operatorname{tg}\tau &= \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx}{u_0^2}(1+\mathfrak{z}) \\ y &= x\operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2u_0^2}\left(1 + \frac{2}{3}\mathfrak{z}\right) \end{aligned}\right.$$

Point de chute

$$\left\{\begin{aligned} \frac{u_\omega}{u_0} &= \frac{1}{(1+2\mathfrak{z})^{\frac{1}{2}}} \qquad \mathfrak{z} = b_4 V_0^2 X \\ \frac{u_0 T}{X} &= \frac{(1+2\mathfrak{z})^{\frac{3}{2}}}{3\mathfrak{z}} - 1 \\ \frac{\operatorname{tg}\omega}{\operatorname{tg}\alpha} &= 1 - 2\frac{gX}{V_0^2 \sin 2\alpha}(1+\mathfrak{z}) = 1 - \frac{2(1+\mathfrak{z})}{1+\frac{2}{3}\mathfrak{z}} \\ \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{gX} &= 1 + \frac{2}{3}\mathfrak{z} \end{aligned}\right.$$

275. **Trajectoire de Piton-Bressant.** — La trajectoire de Piton-Bressant est l'équation du 3ᵉ degré :

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} (1 + KV_0^2 x)$$

où K est un coefficient constant.

Elle peut être considérée comme la trajectoire de plein fouet d'une loi biquadratique, $n = 4$, et elle est identique avec la formule donnée au paragraphe précédent

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} \left(1 + \frac{2}{3} z\right)$$

à condition de poser

$$KV_0^2 = \frac{2}{3} cB_4 \left(\frac{\cos \lambda \cos^2 \alpha}{\cos^4 \mu}\right) V_0^2.$$

Mais de plus, l'équation de Piton-Bressant suppose que K est indépendant de l'angle de projection α. On prend donc :

$$\frac{\cos \lambda \cos^2 \alpha}{\cos^4 \mu} = 1 \qquad \text{et on a :} \qquad K = \frac{2}{3} cB_4.$$

Cette équation a eu une fortune des plus heureuses ; offrant le maximum de simplicité après celle du vide, elle correspond à une forme $F(v) = B_4 v^4$ de la résistance de l'air qui, ainsi qu'on l'a dit (12), lorsque les vitesses initiales ne dépassaient pas 500 mètres, était des plus satisfaisantes.

Cette formule a donc pu donner des résultats excellents dans la pratique et on l'a vue se prêter à la représentation suffisante de très nombreux tirs balistiques.

Les méthodes empiriques, longtemps en usage à la Commission de Gâvre, ne pouvaient donc prendre une base plus solide que l'équation de Piton-Bressant.

La discussion de cette équation, sa comparaison avec les résultats d'un très grand nombre de tirs balistiques, l'établissement des formules pratiques qu'on en peut tirer, constituent les bases essentielles du *Traité de Balistique expérimentale* de MM. Hélie et Hugoniot en ce qui concerne la Balistique Extérieure.

Les formules pour un point quelconque et pour le point de chute sont celles du n° 273 ($n = 4$) où on remplacera $\mathfrak{z}$ par $\frac{3}{2} KV_0^2 x$.

Exercices. — 1° Établir les formules du sommet de la trajectoire;

2° Établir les formules différentielles donnant

$$\frac{\partial X}{\partial c}, \frac{\partial X}{\partial V_0}, \frac{\partial X}{\partial \alpha};$$

3° Prenant pour variable (Gâvre) la quantité $\mathbf{z}$ telle que

$$1 + \mathbf{z} = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{gX},$$

exprimer, en fonction de cette variable, les éléments du *point de chute*, du *sommet*, les *formules différentielles*, les *facteurs de tir*.

On peut remarquer que le choix que fit le colonel Siacci (255) de ses deux coefficients $\cos\lambda$ et $\cos\mu$ paraît avoir eu pour objectif de faire coïncider ses formules de tir avec la formule de Piton-Bressant pour

$n = 4$. Ayant choisi en effet $\cos \mu = \cos \alpha$, la formule $\frac{\cos \lambda \cos^2 \alpha}{\cos^4 \mu} = 1$ impose $\cos \lambda = \cos^2 \alpha$, ce qui est bien l'expression adoptée pour le coefficient de Siacci.

Valeur de K *à l'origine*. — Le tracé de la courbe des K en fonction de la portée X fut pendant longtemps l'intermédiaire nécessaire adopté par la Commission de Gâvre pour le calcul numérique des tables de tir. Examinons sommairement comment varie la fonction K dans le voisinage de l'origine.

On a (143), pour le cas du tir horizontal :

$$\frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{gX} = 1 + \frac{4cF_0}{V_0^2} \frac{X}{1.2.3} - \frac{c^2F_0^2}{V_0^4} \left(\frac{V_0 F'_0}{F_0} - 4 \right) \frac{X^2}{1.2.3} + \cdots$$

et par suite :

$$K = \frac{cF_0}{V_0^4} \left[\frac{2}{3} - \frac{n-4}{6} \frac{cF_0}{V_0^2} X \ldots \right]$$

Ainsi donc : 1° pour $X = 0$, on a $K = \frac{2}{3} \frac{cF_0}{V_0^4}$;

2° on a

$$\frac{dK}{dX} = \frac{4-n}{6} \frac{(cF_0)^2}{V_0^6}$$

et par suite : si $n < 4$, K croît avec X ; si $n = 4$, K est constant; si $n > 4$, K décroît quand X croît.

Exercices. — 1° Étudier les conditions dans lesquelles la courbe des K présentera un maximum ou un minimum, en prenant un terme de plus dans le développement de $\frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{gX}$ en série.

2° Démontrer que si le point A décrit une trajectoire homothétique de celle du vide dans le rapport de 2 à 1 et le point M la trajectoire de Piton-Bressant :

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} (1 + KV_0^2 x),$$

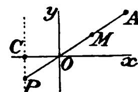


Fig. 77.

avec K constant, on a, sur tout rayon vecteur

$$\overline{PM}^2 = PO.OA,$$

lorsque le point P, décrit la verticale

$$OC = \frac{1}{2KV_0^2};$$

3° Etablir une *règle à calcul* permettant de calculer l'angle de projection connaissant X et $KV_0^2X = \mathbf{z}$.

(Poser $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \mathbf{z}} = \frac{X}{\left(\frac{V_0^2}{g}\right)}$ et prendre les logarithmes.)

276. **Facteurs de tir.** — Dans le cas d'une résistance monôme, les *facteurs de tir* définis au n° 264 ne dépendent plus que d'une seule variable $\mathfrak{z}$ dans laquelle entrent, par leur produit, les deux variables u_0 et cX. Ils peuvent donc être mis sous forme de tables à simple entrée dont l'argument pourra être soit la variable $\mathfrak{z}$, soit un des facteurs $\mathbf{f} = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}$ par exemple, soit encore $\mathbf{z}$ de la formule de Gâvre

$$1 + \mathbf{z} = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Les expressions générales des *facteurs de tir* en fonc-

[1] Cne Gossot, *Mémorial de l'Art. de la Marine*, t. XVI, 1888, p. 95.

tion des *facteurs de la trajectoire* ont été données au n° 264. On pourra effectuer les calculs pour diverses valeurs de n au moyen des formules du n° 273. Et d'après ce qui vient d'être dit, il sera toujours facile de se servir des différentes tables qui ont été publiées par divers auteurs sous des dénominations variées : *Facteurs de tirs de Siacci*, *Logarithmes Balistiques du Ct Chapel*, *Facteurs du point de chute du Cl Henry*, etc.

Toutes ces tables sont des cas particuliers de celles dont le principe a été indiqué au n° 268 et qui, dans la théorie actuelle, jouent le rôle de tables de *première espèce* de la théorie d'Euler (174) tandis que les *facteurs de tir* correspondent aux tables d'Otto (177).

CHAPITRE XI

DEUXIÈME TERME DE LA SÉRIE

§ I. — Formules pour un point quelconque

277. **Problème à résoudre.** — Nous nous proposons maintenant de faire connaître les formules qui donnent le second terme de la série du problème du « Tir de plein fouet », série dont le terme principal a été étudié au Chapitre IX.

Nous conserverons donc, dans le développement de l'hodographe (214), le terme en τ^3 qui y avait été négligé en première approximation et qui provenait du terme $-\frac{\tau^2}{2}$ du cosinus. Le développement que nous obtiendrons alors pour la solution du problème balistique négligera seulement des termes de l'ordre de grandeur de τ^5.

On conçoit que, si on arrive à donner de ce second terme une expression facilement calculable, l'étendue de la zone d'application de telles formules sera considérable et pourra embrasser le plus grand nombre des cas de la pratique, car τ n'atteint jamais qu'exceptionnellement de fortes valeurs, avec les canons de l'Artillerie navale actuelle tout au moins.

278. **Intégration de l'hodographe.** — L'équation

différentielle de l'hodographe, établie au n° 214, quand on y négligera les termes de l'ordre de τ^5 deviendra :

$$\frac{d\tau}{\cos^2\tau} = \frac{g}{c}\,\Phi du + \frac{g}{c}\,\tau^2\left(\Phi + \frac{u}{2}\,\Phi'\right) du.$$

Comme on a : $\Phi = \frac{1}{uF}$

on en déduit $\Phi' = -\frac{1}{u^2 F} - \frac{F'}{uF^2}$

Posant alors :

$$\Psi = \Phi + \frac{u}{2}\,\Phi' = \frac{1}{2uF}\left(1 - \frac{F}{uF'}\right),$$

il viendra

$$\frac{d\tau}{\cos^2\tau} = \frac{g}{c}\,\frac{du}{uF} + \frac{g}{c}\,\tau^2\Psi du.$$

Intégrons de τ à α et de u à u_0, on aura l'équation

$$\operatorname{tg}\tau = q - \frac{J}{c} + \frac{1}{c}\int_{u_0}^{u} g\tau^2\Psi du$$

avec

$$q = \operatorname{tg}\alpha + \frac{J_0}{c}$$

et

$$J = -\int_{U}^{u}\frac{gdu}{uF}.$$

Mais sous le signe $\int$, on peut remplacer τ^2 par $\left(q - \frac{J}{c}\right)^2$, en ne négligeant ainsi que des termes du 5e ordre en τ.

On aura donc :

$$\operatorname{tg}\tau = q - \frac{J}{c} + \frac{1}{c}\int_{u_0}^{u} g\left(q - \frac{J}{c}\right)^2\Psi du.$$

Développant le carré sous le signe $\int$, il viendra :

$$\operatorname{tg}\tau = q - \frac{J}{c} + \frac{1}{c}\left[\begin{array}{l} q^2 \int_{u_0}^{u} g\Psi du \\ -\frac{q}{c}\int_{u_0}^{u} 2gJ\Psi du \\ +\frac{1}{c^2}\int_{u_0}^{u} gJ^2\Psi du \end{array}\right]$$

Ainsi donc, le problème de l'intégration de l'hodographe se trouvera résolu, moyennant l'introduction de trois *nouvelles fonctions balistiques* de u dont on suppose que des tables aient été calculées au moyen de la fonction $F(v)$ expérimentale.

Posons alors :

$$J^{I} = \int_{U}^{u} g\Psi du;$$

$$J^{II} = \int_{U}^{u} 2gJ\Psi du;$$

$$J^{III} = \int_{U}^{u} gJ^2\Psi du.$$

On aura :

$$\operatorname{tg}\tau = q - \frac{J}{c} + \frac{1}{c}\left[\begin{array}{l} q^2(J^{I} - J^{I}_0) \\ -\frac{q}{c}(J^{II} - J^{II}_0) \\ +\frac{1}{c^2}(J^{III} - J^{III}_0) \end{array}\right]$$

Telle est, pour un point quelconque de la trajectoire défini par la vitesse horizontale u, la valeur de l'inclinaison τ, aux *termes de l'ordre en* τ^5 *près*.

279. **Temps.** — L'intégration des autres équations

différentielles du mouvement se poursuit ensuite très aisément.

Pour le temps, l'équation différentielle

$$dt = -\frac{u}{g}\frac{d\tau}{\cos^2\tau}$$

devient

$$dt = -\frac{1}{c}\frac{du}{u\mathrm{F}} - \frac{1}{c}\left(q - \frac{\mathbf{J}}{c}\right)^2 u\Psi du$$

qui intégrée, donnera :

$$t = \frac{\mathbf{S} - \mathbf{S}_0}{c} - \frac{1}{c}\left[\begin{array}{l} q^2(\mathbf{S}^{\mathrm{I}} - \mathbf{S}_0^{\mathrm{I}}) \\ -\frac{q}{c}(\mathbf{S}^{\mathrm{II}} - \mathbf{S}_0^{\mathrm{II}}) \\ +\frac{1}{c^2}\mathbf{S}^{\mathrm{III}} - \mathbf{S}_0^{\mathrm{III}}) \end{array}\right]$$

en prenant, comme définitions de 3 nouvelles fonctions balistiques, les 3 relations suivantes :

$$\mathbf{S}^{\mathrm{I}} = \int_{\mathrm{U}}^{\mathrm{u}} u\Psi du;$$

$$\mathbf{S}^{\mathrm{II}} = 2\int_{\mathrm{U}}^{\mathrm{u}} \mathbf{J}u\Psi du;$$

$$\mathbf{S}^{\mathrm{III}} = \int_{\mathrm{U}}^{\mathrm{u}} \mathbf{J}^2 u\Psi du.$$

280. **Abscisse.** — Les calculs, tout à fait analogues à ceux du temps, conduisent à la relation

$$x = \frac{\mathbf{D} - \mathbf{D}_0}{c} - \frac{1}{c}\left[\begin{array}{l} q^2(\mathbf{D}^{\mathrm{I}} - \mathbf{D}_0^{\mathrm{I}}) \\ -\frac{q}{c}(\mathbf{D}^{\mathrm{II}} - \mathbf{D}_0^{\mathrm{II}}) \\ +\frac{1}{c^2}(\mathbf{D}^{\mathrm{III}} - \mathbf{D}_0^{\mathrm{III}}) \end{array}\right]$$

avec les formules suivantes qui définissent trois nouvelles fonctions balistiques :

$$D^{I} = \int_{U}^{u} u^2 \Psi du;$$

$$D^{II} = 2\int_{U}^{u} J u^2 \Psi du;$$

$$D^{III} = \int_{U}^{u} J^2 u^2 \Psi du.$$

281. **Ordonnée.** — Dans l'équation différentielle $dy = -\frac{u^2}{g} \operatorname{tg} \tau \frac{d\tau}{\cos \tau}$, on remplacera $\operatorname{tg} \tau$ et $\frac{d\tau}{\cos^2 \tau}$ par leurs valeurs en conservant les termes en τ^3.

En ne conservant alors que des termes en τ^4 dans y dont le premier membre est, comme on sait, du 2^e ordre en τ, il viendra

$$dy = -\left(q - \frac{J}{c}\right)\frac{udu}{cF} - \frac{1}{c^2}\frac{udu}{F}\begin{bmatrix} q^2 (J^{I} - J^{I}_{0}) \\ -\frac{q}{c}(J^{II} - J^{II}_{0}) \\ +\frac{1}{c^2}(J^{III} - J^{III}_{0}) \end{bmatrix} - \frac{1}{c}\left(q - \frac{J}{c}\right)^3 u^2 \Psi du$$

En intégrant, on aura la formule suivante

$$y = q\,\frac{D - D_0}{c} - \frac{A - A_0}{c^2} - \frac{q^3}{c}(D^{I} - D^{I}_{0}) + \frac{1}{c^2}\begin{bmatrix} q^2 [A^{I} - A^{I}_{0} - J^{I}_{0}(D - D_0)] \\ -\frac{q}{c}[A^{II} - A^{II}_{0} - J^{II}_{0}(D - D_0)] \\ +\frac{1}{c^2}[A^{III} - A^{III}_{0} - J^{III}_{0}(D - D_0)] \end{bmatrix}$$

Dans cette équation, s'introduisent trois nouvelles fonctions balistiques, ayant les définitions suivantes :

$$\mathbf{A}^{\mathrm{I}} = \int_{\mathrm{U}}^{u} \left(3\mathbf{J}u^2\Psi - \frac{u}{\mathrm{F}}\mathbf{J}^{\mathrm{I}}\right) du;$$

$$\mathbf{A}^{\mathrm{II}} = \int_{\mathrm{U}}^{u} \left(3\mathbf{J}^2u^2\Psi - \frac{u}{\mathrm{F}}\mathbf{J}^{\mathrm{II}}\right) du;$$

$$\mathbf{A}^{\mathrm{III}} = \int_{\mathrm{U}}^{u} \left(\mathbf{J}^3u^2\Psi - \frac{u}{\mathrm{F}}\mathbf{J}^{\mathrm{III}}\right) du.$$

282. **Résumé**. — On a donné aux n°s 277, 278, 279, 280 les formules qui font connaître les éléments d'un point de la trajectoire défini par sa vitesse horizontale u, en fonction des données initiales u_0, α et c.

Le développement néglige des termes de l'ordre de τ^3.

Pour résoudre numériquement le problème, il suffit de dresser une fois pour toutes, avec la fonction F(v) expérimentale, la table de *douze intégrales*, ou *fonctions balistiques du second terme*. Ce sont les suivantes :

$\mathbf{J}^{\mathrm{I}}$, $\mathbf{J}^{\mathrm{II}}$, $\mathbf{J}^{\mathrm{III}}$, pour l'*inclinaison* ;

$\mathbf{S}^{\mathrm{I}}$, $\mathbf{S}^{\mathrm{II}}$, $\mathbf{S}^{\mathrm{III}}$, pour le *temps* ;

$\mathbf{D}^{\mathrm{I}}$, $\mathbf{D}^{\mathrm{II}}$, $\mathbf{D}^{\mathrm{III}}$, pour l'*abscisse* ;

$\mathbf{A}^{\mathrm{I}}$, $\mathbf{A}^{\mathrm{II}}$, $\mathbf{A}^{\mathrm{III}}$, pour l'*ordonnée*.

283. **Exercices**. — 1° Dans l'expression de

$$\Psi = \frac{1}{2u\mathrm{F}}\left(1 - \frac{u\mathrm{F}'}{\mathrm{F}}\right)$$

figure la dérivée F′ de la fonction F; mais les *douze fonctions balistiques* du second terme peuvent s'exprimer au moyen de la fonction F seule.

Démontrer, en effet, qu'on a

$$\mathbf{J}^{\mathrm{I}} = -\frac{1}{2}\mathbf{J} + \frac{g}{2}\left[\frac{1}{\mathrm{F}(u)} - \frac{1}{\mathrm{F}(\mathrm{U})}\right]$$

$$\mathbf{J}^{\mathrm{II}} = -\frac{1}{2}\mathbf{J}^2 + \frac{g\mathbf{J}}{\mathrm{F}} + g\int_{\mathrm{U}}^{u} g\,\frac{du}{u\mathrm{F}^2}$$

$$\mathbf{J}^{\mathrm{III}} = -\frac{1}{6}\mathbf{J}^3 + \frac{g}{2}\,\frac{\mathbf{J}^2}{\mathrm{F}} + g\int_{\mathrm{U}}^{u} g\,\frac{\mathbf{J}du}{u\mathrm{F}^2}$$

$$\mathbf{S}^{\mathrm{I}} = \frac{1}{2}\left[\frac{u}{\mathrm{F}(u)} - \frac{\mathrm{U}}{\mathrm{F}(\mathrm{U})}\right]$$

$$\mathbf{S}^{\mathrm{II}} = \mathbf{J}\,\frac{u}{\mathrm{F}} + \int_{\mathrm{U}}^{u} g\,\frac{du}{\mathrm{F}^2}$$

$$\mathbf{S}^{\mathrm{III}} = \frac{1}{2}\mathbf{J}^2\,\frac{u}{\mathrm{F}} + \int_{\mathrm{U}}^{u} \frac{g\mathbf{J}du}{\mathrm{F}^2}$$

$$\mathbf{D}^{\mathrm{I}} = \frac{1}{2}\mathbf{D} + \frac{1}{2}\left[\frac{u^2}{\mathrm{F}(u)} - \frac{\mathrm{U}^2}{\mathrm{F}(\mathrm{U})}\right]$$

$$\mathbf{D}^{\mathrm{II}} = \mathbf{A} + \mathbf{J}\,\frac{u^2}{\mathrm{F}} + \int_{\mathrm{U}}^{u} g\,\frac{udu}{\mathrm{F}^2}$$

$$\mathbf{D}^{\mathrm{III}} = \frac{1}{2}\mathbf{J}^2\,\frac{u^2}{\mathrm{F}} + \int_{\mathrm{U}}^{u} g\,\frac{\mathbf{J}udu}{\mathrm{F}^2} - \int_{\mathrm{U}}^{u} \frac{\mathbf{J}^2udu}{\mathrm{F}}$$

$$\mathbf{A}^{\mathrm{I}} = \frac{3}{2}\mathbf{D}^{\mathrm{II}} - \int_{\mathrm{U}}^{u} \frac{\mathbf{J}^{\mathrm{I}}\,udu}{\mathrm{F}} = \mathbf{D}^{\mathrm{II}} + \frac{\mathbf{J}}{2}\,\frac{u^2}{\mathrm{F}(u)} - \frac{g}{2\mathrm{F}(\mathrm{U})}\mathbf{D}.$$

$$\mathbf{A}^{\mathrm{II}} = 3\mathbf{D}^{\mathrm{III}} - \int_{\mathrm{U}}^{u} \frac{\mathbf{J}^{\mathrm{II}}\,udu}{\mathrm{F}}$$

$$\mathbf{A}^{\mathrm{III}} = \frac{1}{2}\mathbf{J}^3\frac{u^2}{\mathrm{F}} - \frac{1}{2}\int_{\mathrm{U}}^{u} \frac{\mathbf{J}^3udu}{\mathrm{F}} + \frac{3}{2}\int_{\mathrm{U}}^{u} g\,\frac{\mathbf{J}^2\,udu}{\mathrm{F}^2} - \int_{\mathrm{U}}^{u} \frac{\mathbf{J}^{\mathrm{III}}\,udu}{\mathrm{F}}$$

2. Développer les fonctions balistiques du second terme en série.

Posant

$$\Psi_0 = \frac{1}{2u_0F_0}\left(1 - \frac{u_0F'_0}{F_0}\right)$$

et $$\left(\frac{d\Psi}{du}\right)_0 = -\frac{1}{u_0^2F_0^3}\left[u_0^2F_0F''_0 - 2u_0^2F'^2_0 + u_0F_0F'_0 + F_0^2\right]$$

On trouve

$$\mathbf{J}^{\mathrm{I}} = \mathbf{J}^{\mathrm{I}}_0 - (u_0 - u)g\Psi_0 + \frac{(u_0 - u)^2}{1.2}g\left(\frac{d\Psi}{du}\right)_0 + \cdots$$

$$\mathbf{J}^{\mathrm{II}} = \mathbf{J}^{\mathrm{II}}_0 - (u_0 - u)2g\mathbf{J}_0\Psi_0 + \frac{(u_0 - u)^2}{1.2}2g\left[-g\frac{\Psi_0}{u_0F_0} + \mathbf{J}_0\left(\frac{d\Psi}{du}\right)_0\right] + \cdots$$

$$\mathbf{J}^{\mathrm{III}} = \mathbf{J}^{\mathrm{III}}_0 - (u_0 - u)g\mathbf{J}_0^2\Psi_0 + \frac{(u_0 - u)^2}{1.2}g\left[-2g\frac{\mathbf{J}_0\Psi_0}{u_0F_0} + \mathbf{J}_0^2\left(\frac{d\Psi}{du}\right)_0\right] + \cdots$$

etc.

3. Démontrer que, dans le cas de $F(v) = B_nv^n$, l'équation différentielle de l'hodographe s'écrit :

$$\frac{d\tau}{\cos^2\tau} = \frac{g}{c}\frac{du}{uF} + \frac{1-n}{2}\operatorname{tg}^2\tau\frac{d\tau}{\cos^2\tau}.$$

et s'intègre par la formule :

$$\operatorname{tg}\tau = \operatorname{tg}\alpha + \frac{\mathbf{J}_0 - \mathbf{J}}{c} + \frac{1-n}{6}(\operatorname{tg}^3\tau - \operatorname{tg}^3\alpha)$$

4. Trouver l'expression des *fonctions balistiques du second terme* dans le cas de $F(v) = B_nv^n$, avec $U = \infty$.

$$\mathbf{J}^{\mathrm{I}} = -\frac{(n-1)g}{2B_n}\int_\infty^u \frac{du}{u^{n+1}} = \frac{n-1}{2n}\frac{g}{B_n}\frac{1}{u^n} = \frac{n-1}{2}\mathbf{J}$$

$$\mathbf{J}^{\mathrm{II}} = -\frac{(n-1)g^2}{nB_n^2}\int_\infty^u \frac{du}{u^{2n+1}} = \frac{n-1}{2n^2}\frac{g^2}{B_n^2}\frac{1}{u^{2n}} = \frac{n-1}{2}\mathbf{J}^2$$

$$\mathbf{J}^{\mathrm{III}} = -\frac{(n-1)g^3}{2n^2B_n^3}\int_\infty^u \frac{du}{u^{3n+1}} = \frac{n-1}{6n^3}\frac{g^3}{B_n^3}\frac{1}{u^{3n}} = \frac{n-1}{6}\mathbf{J}^3$$

$$S^{\mathrm{I}}=-\frac{n-1}{2B_n}\int_\infty^u\frac{du}{u^n}=\frac{n-1}{2(n-1)B_n}\frac{1}{u^{n-1}}=\frac{n-1}{2}\mathbf{S}$$

$$S^{\mathrm{II}}=-\frac{(n-1)g}{nB_n^2}\int_\infty^u\frac{du}{u^{2n}}=\frac{n-1}{n(2n-1)}\frac{g}{B_n^2}\frac{1}{u^{2n-1}}=\frac{(n-1)^2}{2n-1}\mathbf{JS}$$

$$S^{\mathrm{III}}=-\frac{(n-1)g^2}{2n^2B_n^3}\int_\infty^u\frac{du}{u^{3n}}=\frac{n-1}{2n^2(3n-1)}\frac{g^2}{B_n^3}\frac{1}{u^{3n-1}}$$
$$=\frac{(n-1)^2}{2(3n-1)}\mathbf{J^2S}$$

$$D^{\mathrm{I}}=-\frac{n-1}{2B}\int_\infty^u\frac{du}{u^{n-1}}=\frac{n-1}{2(n-2)}\frac{1}{B^n}\frac{1}{u^{n-2}}=\frac{n-1}{2}\mathbf{D}$$

$$D^{\mathrm{II}}=-\frac{(n-1)g}{nB_n^2}\int_\infty^u\frac{du}{u^{2n-1}}=\frac{n-1}{n(2n-2)}\frac{g}{B_n^2}\frac{1}{u^{2n-2}}$$
$$=\frac{(n-2)}{2}\mathbf{JD}$$

$$D^{\mathrm{III}}=-\frac{(n-1)g^2}{2n^2B_n^3}\int_\infty^u\frac{du}{u^{3n-1}}=\frac{n-1}{2n^2(3n-2)}\frac{g^2}{B_n^3}\frac{1}{u^{3n-2}}$$
$$=\frac{(n-1)(n-2)}{2(3n-2)}\mathbf{J^2D}$$

$$A^{\mathrm{I}}=-2\,\frac{n-1}{n}\frac{g}{B_n^2}\int_\infty^u\frac{du}{u^{2n-1}}=\frac{2n-2}{n(2n-2)}\frac{g}{B_n^2}\frac{1}{u^{2n-2}}$$
$$=(n-2)\,\mathbf{JD}$$

$$A^{\mathrm{II}}=-2\,\frac{n-1}{n^2}\frac{g^2}{B_n^3}\int_\infty^u\frac{du}{u^{3n-1}}=\frac{2n-2}{n^2(3n-2)}\frac{g^2}{B_n^3}\frac{1}{u^{3n-2}}$$
$$=\frac{(n-1)(n-2)}{3n-2}\mathbf{J^2D}$$

$$A^{\mathrm{III}}=-\frac{1}{3}\frac{n-1}{n^3}\frac{g^3}{B_n^4}\int_\infty^u\frac{du}{u^{4n-1}}=\frac{1}{3}\frac{n-1}{n^3(4n-2)}\frac{g^3}{B_n^4}\frac{1}{u^{4n-2}}$$
$$=\frac{1}{3}\frac{(n-1)(n-2)}{4n-2}\mathbf{J^3D}$$

5. *Dans le cas de* $F(v) = B_n v^n$, *établir le développement en série en fonction des puissances de* $\operatorname{tg} \tau$.

On part des équations de la théorie d'Euler (161)

$$\frac{g}{nb_n u^n} = Q - \xi_n(\tau) \qquad \text{où} \qquad Q = \frac{g}{nb_n u_0^n} + \xi_n(\alpha).$$

Posons $p = \operatorname{tg} \tau$. On aura, pour le développement de $\xi_n(\tau)$ en série :

$$\xi_n(\tau) = \int_0^\tau \frac{d\tau}{\cos^{n+1}\tau} = \int_0^\tau (1+p^2)^{\frac{n-1}{2}} dp = p + \frac{n-1}{1.2.3} p^3 + \cdots$$

On écrira par suite

$$u = \left(\frac{g}{nb_n}\right)^{\frac{1}{n}} [Q - \xi_n(\tau)]^{-\frac{1}{n}}$$

$$= \left(\frac{1}{nb}\right)^{\frac{1}{n}} \left[Q^{-\frac{1}{n}} + \frac{1}{n} Q^{-\frac{1}{n}-1} \xi_n - \frac{1}{n} \frac{\left(-\frac{1}{n}-1\right)}{1.2} Q^{-\frac{1}{n}-2} \xi_n^2 + \frac{1}{n} \frac{\left(-\frac{1}{n}-1\right)}{1.2.3} \left(-\frac{1}{n}-2\right) Q^{-\frac{1}{n}-3} \xi_n^3 + \cdots \right]$$

ou bien, en remplaçant ξ_n par son développement, borné aux termes en p^3

$$u = \left(\frac{g}{nb_n Q}\right)^{\frac{1}{n}} \left[1 + \frac{1}{nQ} p + \frac{n+1}{n^2 Q^2} \frac{p^2}{1.2} + \left(\frac{n-1}{nQ} - \frac{(n+1)(n+2)}{n^3 Q^3}\right) \frac{p^3}{1.2.3} + \cdots \right]$$

On aura de même :

$$u^2 = \left(\frac{g}{nb_n Q}\right)^{\frac{2}{n}} \left[1 + \frac{2}{nQ} p + \frac{2(n+2)}{n^2 Q^2} \frac{p^2}{1.2} + \left(\frac{2(n-1)}{nQ} - \frac{2(n+2)(2n+2)}{n^3 Q^3\, 1.2.3}\right) p^3 + \cdots \right]$$

On portera ces valeurs de u et de u^2 dans les équations du mouvement

$$dt = -\frac{u}{g}\frac{d\tau}{\cos^2\tau} = -\frac{u}{g}dp$$

$$dx = -\frac{u^2}{g}\frac{d\tau}{\cos^2\tau} = -\frac{u^2}{g}dp$$

$$dy = -\frac{u^2}{g}\operatorname{tg}\tau\frac{d\tau}{\cos^2\tau} = -\frac{u^2}{g}pdp$$

et on intégrera de p à p_0 c'est-à-dire de τ à α.

On arrivera ainsi aux formules suivantes :

$$Q^{\frac{1}{n}}\left[\frac{nb_n}{g}\right]^{\frac{1}{n}} u = 1 + \frac{1}{nQ}p + \frac{n+1}{n^2Q^2}\frac{p^2}{1.2} + \left(\frac{n-1}{nQ} - \frac{(n+1)(n+2)}{n^3Q^3}\right)\frac{p^3}{1.2.3} + \cdots$$

$$Q^{\frac{1}{n}}\left[\frac{nb_n}{g}\right]^{\frac{1}{n}} gt = p_0 - p + \frac{1}{nQ}\frac{p_0^2 - p^2}{1.2} + \frac{n+1}{n^2Q^2}\frac{p_0^3 - p^3}{1.2.3} + \left(\frac{n-1}{nQ} - \frac{(n+1)(n+2)}{n^3Q^3}\right)\frac{p_0^4 - p^4}{1.2.3.4} + \cdots$$

$$Q^{\frac{2}{n}}\left[\frac{nb_n}{g}\right]^{\frac{2}{n}} gx = p_0 - p + \frac{2}{nQ}\frac{p_0^2 - p^2}{1.2} + \frac{2(n+2)}{n^2Q^2}\frac{p_0^3 - p^3}{1.2.3} + 2\left(\frac{(n-1)}{nQ} - \frac{(n+2)(2n+2)}{n^3Q^3}\right)\frac{p_0^4 - p^4}{1.2.3.4}$$

$$Q^{\frac{2}{n}}\left[\frac{nb_n}{g}\right]^{\frac{2}{n}} gy = \frac{p_0^2 - p^2}{1.2} + \frac{2.2}{nQ}\frac{p_0^3 - p^3}{1.2.3} + \frac{2.3(n+1)}{n^2Q^2}\frac{p_0^4 - p^4}{1.2.3.4} + 2.4\left(\frac{(n-1)}{nQ} - \frac{(n+2)(2n+2)}{n^3Q^3}\right)\frac{p_0^5 - p^5}{1.2.3.4.5}$$

§ 2. — Point de chute et sommet

284. **Objet de ce paragraphe.** — En supposant calculées les douze *fonctions balistiques du second terme*, les calculs des éléments d'un point de la trajectoire ne laisseraient pas que d'être longs et sujets à erreurs. Nous nous proposons de montrer ici comment, pour les deux points principaux de la trajectoire, le *point de chute* et le *sommet*, on pourrait mettre les formules sous des formes commodes et les rendre immédiatement calculables au moyen de fonctions de u_0 et de u_ω données par des tables numériques à double entrée.

285. **Équation du point de chute.** — En faisant $y = 0$, dans l'équation de l'ordonnée du n° 280 on trouve :

$$0 = q\,\frac{\mathbf{D}_\omega - \mathbf{D}_0}{c} - \frac{\mathbf{A}_\omega - \mathbf{A}_0}{c^2} - m\theta^4.$$

$m\theta^4$ désignant l'ensemble des termes de l'ordre de τ^4 qui constituent le second terme de la série dans l'équation de l'ordonnée, les deux autres $q\,\frac{\mathbf{D}_\omega - \mathbf{D}_0}{c}$ et $\frac{\mathbf{A}_\omega - \mathbf{A}_0}{c^2}$ étant, comme on sait, du second ordre.

Dans le terme $m\theta^4$ figurent quatre quantités u_0, u_ω, q et c, et on ne négligera que des termes d'un ordre supérieur au quatrième en remplaçant : 1° u_ω par sa valeur trouvée quand on suppose $m\theta^4$ nul et 2° $\frac{1}{c}$ par sa valeur $q\,\frac{\mathbf{D}_\omega - \mathbf{D}_0}{\mathbf{A}_\omega - \mathbf{A}_0}$, trouvée dans la même hypothèse. Alors q^3 devient facteur commun à tous les

termes de $m\theta^4$; on peut le faire sortir, et il viendra :

$$o = q(\mathbf{D}_\omega - \mathbf{D}_0) - \frac{\mathbf{A}_\omega - \mathbf{A}_0}{c} - q^3\mathbf{K}_\mathbf{A}$$

équation où $\mathbf{K}_\mathbf{A}$ est une fonction connue des deux variables u_0 et u_ω.

Si on possédait une table à double entrée de la fonction $\mathbf{K}_\mathbf{A}$, le calcul de u_ω se ferait comme il suit : une première approximation, avec $q^3\mathbf{K}_\mathbf{A}$ supposé nul, donnerait une valeur u_ω ; à l'aide de la table à double entrée, $\mathbf{K}_\mathbf{A}$ serait déduit en regard des deux valeurs u_0 et u_ω ; on aurait ainsi le produit $q^3\mathbf{K}_\mathbf{A}$ et en le reportant dans l'équation complète, on chercherait la valeur de u_ω qui la satisfait.

Mais on peut éviter ces tâtonnements ainsi qu'il suit.

286. **Formules du point de chute.** — Donnons d'abord les expressions des différents éléments du point de chute avec le second terme.

Continuons à désigner par u_ω la *vitesse restante horizontale* que donnent les équations du tir de plein fouet réduites au terme principal et désignons par $[u_\omega]$ la vitesse horizontale quand on conserve le second terme de la série ; adoptons la même notation pour les autres éléments.

Les formules du point de chute sont les suivantes :

$$o = q(\mathbf{D}[u_\omega] - \mathbf{D}_0) - \frac{1}{c}(\mathbf{A}[u_\omega] - \mathbf{A}_0) - q^3\mathbf{K}_\mathbf{A}$$

$$[\text{tg}\,\omega] = q - \frac{1}{c}\mathbf{J}[u_\omega] + q^3\mathbf{K}_\mathbf{J}$$

$$[\mathrm{T}] = \frac{1}{c}(\mathbf{S}[u_\omega] - \mathbf{S}_0) - q^3\mathbf{K}_\mathbf{S}$$

$$[\mathrm{X}] = \frac{1}{c}(\mathbf{D}[u_\omega] - \mathbf{D}_0) - q^3\mathbf{K}_\mathbf{D}$$

Dans ces équations les fonctions $\mathbf{K_A}$, $\mathbf{K_J}$, $\mathbf{K_S}$, $\mathbf{K_D}$ ont les valeurs suivantes :

$$
{}_{\mathbf{A}} = \mathbf{D}^{\mathrm{I}}_{\omega} - \mathbf{D}^{\mathrm{I}}_{0} - \frac{\mathbf{D}_{\omega} - \mathbf{D}_{0}}{\mathbf{A}_{\omega} - \mathbf{A}_{0}} \left[\begin{array}{l} \mathbf{A}^{\mathrm{I}}_{\omega} - \mathbf{A}^{\mathrm{I}}_{0} - \mathbf{J}^{\mathrm{I}}_{0}(\mathbf{D}_{\omega} - \mathbf{D}_{0}) \\ - \left(\mathbf{A}^{\mathrm{II}}_{\omega} - \mathbf{A}^{\mathrm{II}}_{0} - \mathbf{J}^{\mathrm{II}}_{0}(\mathbf{D}_{\omega} - \mathbf{D}_{0})\right) \dfrac{\mathbf{D}_{\omega} - \mathbf{D}_{0}}{\mathbf{A}_{\omega} - \mathbf{A}_{0}} \\ + \left(\mathbf{A}^{\mathrm{III}}_{\omega} - \mathbf{A}^{\mathrm{III}}_{0} - \mathbf{J}^{\mathrm{III}}_{0}(\mathbf{D}_{\omega} - \mathbf{D}_{0})\right) \left(\dfrac{\mathbf{D}_{\omega} - \mathbf{D}}{\mathbf{A}_{\omega} - \mathbf{A}} \right. \end{array} \right.
$$

$$
\mathbf{K_J} = \frac{\mathbf{D}_{\omega} - \mathbf{D}_{0}}{\mathbf{A}_{\omega} - \mathbf{A}_{0}} \cdot \left[\begin{array}{l} \mathbf{J}^{\mathrm{I}}_{\omega} - \mathbf{J}^{\mathrm{I}}_{0} \\ - (\mathbf{J}^{\mathrm{II}}_{\omega} - \mathbf{J}^{\mathrm{II}}_{0}) \dfrac{\mathbf{D}_{\omega} - \mathbf{D}_{0}}{\mathbf{A}_{\omega} - \mathbf{A}_{0}} \\ + (\mathbf{J}^{\mathrm{III}}_{\omega} - \mathbf{J}^{\mathrm{III}}_{0}) \left(\dfrac{\mathbf{D}_{\omega} - \mathbf{D}_{0}}{\mathbf{A}_{\omega} - \mathbf{A}_{0}}\right)^2 \end{array} \right]
$$

$$
\mathbf{K_S} = \frac{\mathbf{D}_{\omega} - \mathbf{D}_{0}}{\mathbf{A}^{\omega} - \mathbf{A}_{0}} \left[\begin{array}{l} \mathbf{S}^{\mathrm{I}}_{\omega} - \mathbf{S}^{\mathrm{I}}_{0} \\ - (\mathbf{S}^{\mathrm{II}}_{\omega} - \mathbf{S}^{\mathrm{II}}_{0}) \dfrac{\mathbf{D}_{\omega} - \mathbf{D}_{0}}{\mathbf{A}_{\omega} - \mathbf{D}_{0}} \\ + (\mathbf{S}^{\mathrm{III}}_{\omega} - \mathbf{S}^{\mathrm{III}}_{0}) \left(\dfrac{\mathbf{D}_{\omega} - \mathbf{D}_{0}}{\mathbf{A}_{\omega} - \mathbf{A}_{0}}\right)^2 \end{array} \right]
$$

$$
\mathbf{K_D} = \frac{\mathbf{D}_{\omega} - \mathbf{D}_{0}}{\mathbf{A}_{\omega} - \mathbf{A}_{0}} \left[\begin{array}{l} \mathbf{D}^{\mathrm{I}}_{\omega} - \mathbf{D}^{\mathrm{I}}_{0} \\ - (\mathbf{D}^{\mathrm{II}}_{\omega} - \mathbf{D}^{\mathrm{II}}_{0}) \dfrac{\mathbf{D}_{\omega} - \mathbf{D}_{0}}{\mathbf{A}_{\omega} - \mathbf{A}_{0}} \\ + (\mathbf{S}^{\mathrm{III}}_{\omega} - \mathbf{S}^{\mathrm{III}}_{0}) \left(\dfrac{\mathbf{D}_{\omega} - \mathbf{D}_{0}}{\mathbf{A}_{\omega} - \mathbf{A}_{0}}\right)^2 \end{array} \right]
$$

287. **Calcul de $[u_\omega]$ en fonction de u_ω.** — Dans l'équation du point de chute

$$
0 = q\left(\mathbf{D}[u_\omega] - \mathbf{D}_0\right) - \frac{1}{c}\left(\mathbf{A}[u_\omega] - \mathbf{A}_0\right) - q^3\,\mathbf{K_A}
$$

posons $[u_\omega] = u_\omega + \varepsilon$ et proposons-nous de déterminer la différence ε. Pour cela, il suffira d'employer la for-

mule de Taylor réduite à ses deux premiers termes, ce qui donnera

$$0 = q(\mathbf{D}_\omega - \mathbf{D}_0) - \frac{1}{c}(\mathbf{A}_\omega - \mathbf{A}_0) - q\varepsilon\frac{u_\omega}{\mathbf{F}_\omega} + \frac{1}{c}\varepsilon\mathbf{J}_\omega\frac{u_\omega}{\mathbf{F}_\omega} - q^3\mathbf{K}_\Lambda$$

et comme la somme des deux premiers termes est nulle, il reste

$$\varepsilon = q^3\,\mathbf{K}_\Lambda\,\frac{\mathbf{F}_\omega}{u_\omega}\,\frac{1}{\dfrac{\mathbf{J}_\omega}{c} - q}$$

ou encore

$$\varepsilon = -\,q^3\,\mathbf{K}_\Lambda\,\frac{\mathbf{F}_\omega}{u_\omega\,\operatorname{tg}\omega}.$$

Mais comme d'après une formule du n° 221 on a

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{1}{c}\left[\frac{\mathbf{A}_\omega - \mathbf{A}_0}{\mathbf{D}_\omega - \mathbf{D}_0} - \mathbf{J}_\omega\right] \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg}\omega = q\left[1 - \mathbf{J}_\omega\frac{\mathbf{D}_\omega - \mathbf{D}_0}{\mathbf{A}_\omega - \mathbf{A}_0}\right]$$

il viendra $\qquad |u_\omega| = u_\omega + q^2\,\mathfrak{A}_\omega^0$

en posant

$$\mathfrak{A}_\omega^0 = \frac{\mathbf{F}_\omega}{u_\omega}\,\frac{\mathbf{K}_\Lambda}{\left(\mathbf{J}_\omega\dfrac{\mathbf{D}_\omega - \mathbf{D}_0}{\mathbf{A}_\omega - \mathbf{A}_0} - 1\right)}$$

$\mathfrak{A}_\omega^0$ est ainsi une fonction des deux variables u_0 et u_ω, puisque $\mathbf{K}_\Lambda$ est déjà une fonction de ces deux variables.

On peut reconnaître que la fonction $\mathfrak{A}_\omega^0$ représente bien une vitesse, car on peut l'écrire

$$\left(\frac{\mathbf{K}_\Lambda}{c}\right)\left(\frac{c\mathbf{F}_\omega}{u_\omega}\right)\frac{1}{\mathbf{J}_\omega\dfrac{\mathbf{D}_\omega - \mathbf{D}_0}{\mathbf{A}_\omega - \mathbf{A}_0} - 1}$$

Posant

$$\Psi_0 = \frac{1}{2u_0F_0}\left(1 - \frac{u_0F'_0}{F_0}\right)$$

et $$\left(\frac{d\Psi}{du}\right)_0 = -\frac{1}{u_0^2F_0^3}\left[u_0^2F_0F''_0 - 2u_0^2F'^2_0 + u_0F_0F'_0 + F_0^2\right]$$

On trouve

$$\mathbf{J}^{\mathrm{I}} = \mathbf{J}^{\mathrm{I}}_0 - (u_0 - u)g\Psi_0 + \frac{(u_0-u)^2}{1.2}g\left(\frac{d\Psi}{du}\right)_0 + \cdots$$

$$\mathbf{J}^{\mathrm{II}} = \mathbf{J}^{\mathrm{II}}_0 - (u_0 - u)2g\mathbf{J}_0\Psi_0 + \frac{(u_0-u)^2}{1.2}2g\left[-g\frac{\Psi_0}{u_0F_0} + \mathbf{J}_0\left(\frac{d\Psi}{du}\right)_0\right] + \cdots$$

$$\mathbf{J}^{\mathrm{III}} = \mathbf{J}^{\mathrm{III}}_0 - (u_0 - u)g\mathbf{J}_0^2\Psi_0 + \frac{(u_0-u)^2}{1.2}g\left[-2g\frac{\mathbf{J}_0\Psi_0}{u_0F_0} + \mathbf{J}_0^2\left(\frac{d\Psi}{du}\right)_0\right] + \cdots$$

etc.

3. Démontrer que, dans le cas de $F(v) = B_n v^n$, l'équation différentielle de l'hodographe s'écrit :

$$\frac{d\tau}{\cos^2\tau} = \frac{g}{c}\frac{du}{uF} + \frac{1-n}{2}\operatorname{tg}^2\tau\frac{d\tau}{\cos^2\tau}.$$

et s'intègre par la formule :

$$\operatorname{tg}\tau = \operatorname{tg}\alpha + \frac{\mathbf{J}_0 - \mathbf{J}}{c} + \frac{1-n}{6}(\operatorname{tg}^3\tau - \operatorname{tg}^3\alpha)$$

4. Trouver l'expression des *fonctions balistiques du second terme* dans le cas de $F(v) = B_n v^n$, avec $U = \infty$.

$$\mathbf{J}^{\mathrm{I}} = -\frac{(n-1)g}{2B_n}\int_\infty^u \frac{du}{u^{n+1}} = \frac{n-1}{2n}\frac{g}{B_n}\frac{1}{u^n} = \frac{n-1}{2}\mathbf{J}$$

$$\mathbf{J}^{\mathrm{II}} = -\frac{(n-1)g^2}{nB_n^2}\int_\infty^u \frac{du}{u^{2n+1}} = \frac{n-1}{2n^2}\frac{g^2}{B_n^2}\frac{1}{u^{2n}} = \frac{n-1}{2}\mathbf{J}^2$$

$$\mathbf{J}^{\mathrm{III}} = -\frac{(n-1)g^3}{2n^2B_n^3}\int_\infty^u \frac{du}{u^{3n+1}} = \frac{n-1}{6n^3}\frac{g^3}{B_n^3}\frac{1}{u^{3n}} = \frac{n-1}{6}\mathbf{J}^3$$

$$\mathbf{S}^{\mathrm{I}} = -\frac{n-1}{2\mathrm{B_n}}\int_\infty^{\mathrm{u}} \frac{du}{u^{\mathrm{n}}} = \frac{n-1}{2(n-1)\mathrm{B_n}}\,\frac{1}{u^{\mathrm{n}-1}} = \frac{n-1}{2}\,\mathbf{S}$$

$$\mathbf{S}^{\mathrm{II}} = -\frac{(n-1)g}{n\mathrm{B_n^2}}\int_\infty^{\mathrm{u}} \frac{du}{u^{2\mathrm{n}}} = \frac{n-1}{n(2n-1)}\,\frac{g}{\mathrm{B_n^2}}\,\frac{1}{u^{2\mathrm{n}-1}} = \frac{(n-1)^2}{2n-1}\,\mathbf{JS}$$

$$\mathbf{S}^{\mathrm{III}} = -\frac{(n-1)g^2}{2n^2\mathrm{B_n^3}}\int_\infty^{\mathrm{u}} \frac{du}{u^{3\mathrm{n}}} = \frac{n-1}{2n^2(3n-1)}\,\frac{g^2}{\mathrm{B_n^3}}\,\frac{1}{u^{3\mathrm{n}-1}}$$

$$= \frac{(n-1)^2}{2(3n-1)}\,\mathbf{J^2S}$$

$$\mathbf{D}^{\mathrm{I}} = -\frac{n-1}{2\mathrm{B}}\int_\infty^{\mathrm{u}} \frac{du}{u^{\mathrm{n}-1}} = \frac{n-1}{2(n-2)}\,\frac{1}{\mathrm{B^n}}\,\frac{1}{u^{\mathrm{n}-2}} = \frac{n-1}{2}\,\mathbf{D}$$

$$\mathbf{D}^{\mathrm{II}} = -\frac{(n-1)g}{n\mathrm{B_n^2}}\int_\infty^{\mathrm{u}} \frac{du}{u^{2\mathrm{n}-1}} = \frac{n-1}{n(2n-2)}\,\frac{g}{\mathrm{B_n^2}}\,\frac{1}{u^{2\mathrm{n}-2}}$$

$$= \frac{(n-2)}{2}\,\mathbf{JD}$$

$$\mathbf{D}^{\mathrm{III}} = -\frac{(n-1)g^2}{2n^2\mathrm{B_n^3}}\int_\infty^{\mathrm{u}} \frac{du}{u^{3\mathrm{n}-1}} = \frac{n-1}{2n^2(3n-2)}\,\frac{g^2}{\mathrm{B_n^3}}\,\frac{1}{u^{3\mathrm{n}-2}}$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)}{2(3n-2)}\,\mathbf{J^2D}$$

$$\mathbf{A}^{\mathrm{I}} = -2\,\frac{n-1}{n}\,\frac{g}{\mathrm{B_n^2}}\int_\infty^{\mathrm{u}} \frac{du}{u^{2\mathrm{n}-1}} = \frac{2n-2}{n(2n-2)}\,\frac{g}{\mathrm{B_n^2}}\,\frac{1}{u^{2\mathrm{n}-2}}$$

$$= (n-2)\,\mathbf{JD}$$

$$\mathbf{A}^{\mathrm{II}} = -2\,\frac{n-1}{n^2}\,\frac{g^2}{\mathrm{B_n^3}}\int_\infty^{\mathrm{u}} \frac{du}{u^{3\mathrm{n}-1}} = \frac{2n-2}{n^2(3n-2)}\,\frac{g^2}{\mathrm{B_n^3}}\,\frac{1}{u^{3\mathrm{n}-2}}$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)}{3n-2}\,\mathbf{J^2D}$$

$$\mathbf{A}^{\mathrm{III}} = -\frac{1}{3}\,\frac{n-1}{n^3}\,\frac{g^3}{\mathrm{B_n^4}}\int_\infty^{\mathrm{u}} \frac{du}{u^{4\mathrm{n}-1}} = \frac{1}{3}\,\frac{n-1}{n^3(4n-2)}\,\frac{g^3}{\mathrm{B_n^4}}\,\frac{1}{u^{4\mathrm{n}-2}}$$

$$= \frac{1}{3}\,\frac{(n-1)(n-2)}{4n-2}\,\mathbf{J^3D}$$

5. *Dans le cas de* $F(v) = B_n v^n$, *établir le développement en série en fonction des puissances de* $\operatorname{tg} \tau$.

On part des équations de la théorie d'Euler (161)

$$\frac{g}{nb_n u^n} = Q - \xi_n(\tau) \qquad \text{où} \qquad Q = \frac{g}{nb_n u_0^n} + \xi_n(\alpha).$$

Posons $p = \operatorname{tg} \tau$. On aura, pour le développement de $\xi_n(\tau)$ en série :

$$\xi_n(\tau) = \int_0^\tau \frac{d\tau}{\cos^{n+1}\tau} = \int_0^\tau (1+p^2)^{\frac{n-1}{2}} dp = p + \frac{n-1}{1.2.3} p^3 + \cdots$$

On écrira par suite

$$u = \left(\frac{g}{nb_n}\right)^{\frac{1}{n}} [Q - \xi_n(\tau)]^{-\frac{1}{n}}$$

$$= \left(\frac{1}{nb}\right)^{\frac{1}{n}} \left[Q^{-\frac{1}{n}} + \frac{1}{n} Q^{-\frac{1}{n}-1}\xi_n - \frac{1}{n} \frac{\left(-\frac{1}{n} - 1\right)}{1.2} Q^{-\frac{1}{n}-2}\xi_n^2 + \frac{1}{n} \frac{\left(-\frac{1}{n} - 1\right)}{1.2.3} \left(-\frac{1}{n} - 2\right) Q^{-\frac{1}{n}-3}\xi_n^3 + \cdots \right]$$

ou bien, en remplaçant ξ_n par son développement, borné aux termes en p^3

$$u = \left(\frac{g}{nb_n Q}\right)^{\frac{1}{n}} \left[1 + \frac{1}{nQ} p + \frac{n+1}{n^2Q^2} \frac{p^2}{1.2} + \left(\frac{n-1}{nQ} - \frac{(n+1)(n+2)}{n^3Q^3}\right) \frac{p^3}{1.2.3} + \cdots \right]$$

On aura de même :

$$u^2 = \left(\frac{g}{nb_n Q}\right)^{\frac{2}{n}} \left[1 + \frac{2}{nQ} p + \frac{2(n+2)}{n^2Q^2} \frac{p^2}{1.2} + \left(\frac{2(n-1)}{nQ} - \frac{2(n+2)(2n+2)}{n^3Q^3\ 1.2.3}\right) p^3 + \cdots \right]$$

On portera ces valeurs de u et de u^2 dans les équations du mouvement

$$dt = -\frac{u}{g}\frac{d\tau}{\cos^2\tau} = -\frac{u}{g}\,dp$$

$$dx = -\frac{u^2}{g}\frac{d\tau}{\cos^2\tau} = -\frac{u^2}{g}\,dp$$

$$dy = -\frac{u^2}{g}\operatorname{tg}\tau\frac{d\tau}{\cos^2\tau} = -\frac{u^2}{g}\,pdp$$

et on intégrera de p à p_0 c'est-à-dire de τ à α.

On arrivera ainsi aux formules suivantes :

$$Q^{\frac{1}{n}}\left[\frac{nb_n}{g}\right]^{\frac{1}{n}} u = 1 + \frac{1}{nQ}p + \frac{n+1}{n^2Q^2}\frac{p^2}{1.2} + \left(\frac{n-1}{nQ} - \frac{(n+1)(n+2)}{n^3Q^3}\right)\frac{p^3}{1.2.3} + \cdots$$

$$Q^{\frac{1}{n}}\left[\frac{nb_n}{g}\right]^{\frac{1}{n}} gt = p_0 - p + \frac{1}{nQ}\frac{p_0^2 - p^2}{1.2} + \frac{n+1}{n^2Q^2}\frac{p_0^3 - p^3}{1.2.3} + \left(\frac{n-1}{nQ} - \frac{(n+1)(n+2)}{n^3Q^3}\right)\frac{p_0^4 - p^4}{1.2.3.4} + \cdots$$

$$Q^{\frac{2}{n}}\left[\frac{nb_n}{g}\right]^{\frac{2}{n}} gx = p_0 - p + \frac{2}{nQ}\frac{p_0^2 - p^2}{1.2} + \frac{2(n+2)}{n^2Q^2}\frac{p_0^3 - p^3}{1.2.3} + 2\left(\frac{(n-1)}{nQ} - \frac{(n+2)(2n+2)}{n^3Q^3}\right)\frac{p_0^4 - p^4}{1.2.3.4}$$

$$Q^{\frac{2}{n}}\left[\frac{nb_n}{g}\right]^{\frac{2}{n}} gy = \frac{p_0^2 - p^2}{1.2} + \frac{2.2}{nQ}\frac{p_0^3 - p^3}{1.2.3} + \frac{2.3(n+1)}{n^2Q^2}\frac{p_0^4 - p^4}{1.2.3.4} + 2.4\left(\frac{(n-1)}{nQ} - \frac{(n+2)(2n+2)}{n^3Q^3}\right)\frac{p_0^5 - p^5}{1.2.3.4.5}$$

Mais quand α croît, ils deviennent des fonctions différentes des trois données à l'origine V_0, α et c et de la quatrième quantité qui définit l'autre extrémité de l'arc.

Il est bien évident que la détermination de ces quatre facteurs β revient à celle des termes successifs de la série du tir de plein fouet et qu'ils sont connus, pour le point de chute par exemple, à un terme de l'ordre de τ^5 près, d'après les équations du n° 284 qui donnent le second terme de la série.

C'est d'ailleurs ainsi que le colonel Siacci s'est posé le problème. Nous citons ci-dessous l'introduction à la note VIII de son Traité de Balistique.

« La table balistique, avec les formules qui s'y rapportent, n'est pas *toute* la solution du problème balistique. Elle en est toutefois une grande partie, qui est déjà suffisante dans la plupart des cas pratiques. Pour la compléter, il faudrait déterminer les fonctions β qui entrent dans ces formules. Ce n'est pas une question facile, mais c'est une question d'analyse : or l'analyse, qui a résolu des problèmes bien plus difficiles et complexes, a bien assez de puissance pour résoudre encore celui-ci, si l'on ne donne pas trop d'importance à l'économie des calculs. L'économie des calculs ne doit pas trop compter dans cette question, si l'on parvient à en présenter les résultats aux praticiens dans une table où ils puissent puiser les nombres nécessaires à la solution des problèmes de tir.

« Nous présentons un essai de ces calculs dans cette note. Nous ne nous flattons pas de donner la solution définitive d'un problème qui, même dans les cas les plus particuliers, a résisté à beaucoup d'efforts ; mais

il nous semble avoir ouvert une voie à la solution générale et avoir même fait quelques pas dans cette voie.

« Il va sans dire que cette voie se trouve dans la région des séries, car les formules balistiques impliquent inévitablement des fonctions transcendantes qui ne sont au fond que des expressions abrégées de séries. Nous allons donc montrer comment on peut calculer ces fonctions β au moyen de séries ordonnées suivant les *puissances descendantes*, du coefficient balistique. »

Le problème que le colonel Siacci se propose ainsi de traiter est celui que nous avons résolu aux paragraphes 1 et 2 du présent chapitre et qui donne le second terme de la série.

Mais si on remarque que le coefficient balistique de Siacci est l'inverse du nôtre, on voit que, dans ses recherches, ce savant balisticien devait aboutir, non à la *véritable série du tir de plein fouet*, mais à celle qui représente, par ses premiers termes, la solution du problème balistique dans le cas où la *résistance de l'air est très petite*, hypothèse qui conduit au développement en série suivant les puissances de c ; ce cas sera traité plus loin (livre V, chapitre XIV), et il n'est point du tout compatible, en général, avec l'hypothèse du tir de plein fouet (213).

292. **Détermination du facteur β_J de Siacci.** — Si, avec Siacci, on admet qu'en première approximation on peut prendre tous les facteurs β égaux, il suffira de savoir calculer l'un d'entre eux. Or, il est possible de déterminer le facteur β_J par exemple.

Si on compare les deux expressions

$$\lg \tau = \lg \alpha + \frac{\mathbf{J}_0 - \mathbf{J}}{c} + \frac{1}{c}\left[q^2(\mathbf{J}^{\mathrm{I}} - \mathbf{J}_0^{\mathrm{I}}) - \frac{q}{c}(\mathbf{J}^{\mathrm{II}} - \mathbf{J}_0^{\mathrm{II}}) + \frac{1}{c^2}(\mathbf{J}^{\mathrm{III}} - \mathbf{J}_0^{\mathrm{III}})\right]$$

et

$$\lg \tau = \lg \alpha + \frac{\mathbf{J}_0 - \mathbf{J}}{c\beta_{\mathrm{J}}}$$

et qu'on veuille que, pour la même valeur de τ, on ait la même valeur de u, il viendra en retranchant membre à membre

$$\frac{1}{\beta_{\mathrm{J}}} = 1 - \frac{1}{\mathbf{J} - \mathbf{J}_0}\left[q^2(\mathbf{J}^{\mathrm{I}} - \mathbf{J}_0^{\mathrm{I}}) - \frac{q}{c}(\mathbf{J}^{\mathrm{II}} - \mathbf{J}_0^{\mathrm{II}}) + \frac{1}{c^2}(\mathbf{J}^{\mathrm{III}} - \mathbf{J}_0^{\mathrm{III}})\right]$$

On pourrait donc calculer β_{J}, pour un point quelconque de la trajectoire, en connaissant seulement les trois fonctions $\mathbf{J}^{\mathrm{I}}$, $\mathbf{J}^{\mathrm{II}}$ et $\mathbf{J}^{\mathrm{III}}$, supposées calculées avec la fonction $\mathrm{F}(v)$ expérimentale (282).

On pourrait de même calculer β_{S} ou β_{D} en connaissant seulement les 3 fonctions $\mathbf{S}^{\mathrm{I},\,\mathrm{II},\,\mathrm{III}}$ ou $\mathbf{D}^{\mathrm{I},\,\mathrm{II},\,\mathrm{III}}$.

LIVRE V

LES TROIS SÉRIES BALISTIQUES

CHAPITRE XII

LES FONCTIONS BALISTIQUES DE SIACCI AUTOUR D'UN POINT

§ 1. — Formules pour le calcul d'un arc de trajectoire

293. Énoncé du problème. — La méthode du *tir de plein fouet* qui vient d'être exposée dans le chapitre précédent se déduit, sans autre hypothèse, de la connaissance du développement en série du cosinus d'un angle voisin de zéro. Mais, il est bien évident que si l'angle considéré n'est pas voisin de zéro, il n'en existe pas moins un développement du cosinus de τ par rapport à un angle initial α, et que si on l'utilise pour le porter dans les équations du problème balistique, on sera conduit à leur résolution par une série analogue à celle du tir de plein fouet (voir n° 151).

Ainsi soit l'identité

$$\tau = \alpha - (\alpha - \tau) = \alpha - \theta,$$

on aura les expressions suivantes des lignes trigonométriques en fonction de θ.

$$\sin\tau = \sin\alpha - \theta\cos\alpha - \frac{\theta^2}{2}\sin\alpha + \dots$$

$$\cos\tau = \cos\alpha + \theta\sin\alpha - \frac{\theta^2}{2}\cos\alpha + \dots$$

$$\operatorname{tg}\tau = \operatorname{tg}\alpha - \theta\frac{1}{\cos^2\alpha} + \theta^2\frac{\sin\alpha}{\cos^3\alpha} + \dots$$

en négligeant les puissances de θ supérieures à la deuxième.

On se rend compte immédiatement, d'après ces formules, que le développement obtenu, dans le cas de la résolution du problème balistique devra être d'une convergence moindre que dans le cas du tir de plein fouet où, grâce à l'hypothèse $\alpha = 0$, qui annulait le sinus, le développement des lignes trigonométriques, et corrélativement celui des éléments balistiques, sautait un terme sur deux.

Ici, les termes sont au complet et le développement du problème balistique suivant les puissances de θ sera tel que le terme principal, conservé seul, négligera les termes en θ^2 seulement, tandis que dans le tir de plein fouet, on ne négligeait par les mêmes procédés que des termes en θ^3.

294. **Équation différentielle de l'hodographe.** — En posant, comme au n° 214

$$\Phi(v) = \frac{1}{vF}$$

nous écrirons l'équation différentielle de l'hodographe

$$\frac{g}{c}\Phi\left(\frac{u}{\cos\tau}\right)du = -d\theta.$$

D'après la valeur donnée pour $\cos\tau$ au numéro précédent, on calcule

$$\frac{1}{\cos\tau}=\frac{1}{\cos\alpha}-\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}\theta+\left(\frac{1}{2\cos\alpha}+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^3\alpha}\right)\theta^2\ldots$$

En développant la fonction Φ par la formule de Taylor réduite à ses trois premiers termes, on trouve :

$$\Phi\left(\frac{u}{\cos\tau}\right)=\Phi\left(\frac{u}{\cos\alpha}\right)-u\theta\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}\Phi'$$
$$+u\theta^2\left[\frac{u}{2}\frac{\sin^2\alpha}{\cos^4\alpha}\Phi''+\left(\frac{1}{2\cos\alpha}+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^3\alpha}\right)\Phi'\right]+\cdots$$

Prenons pour variable la quantité $\sigma=\dfrac{u}{\cos\alpha}$.

L'équation différentielle de l'hodographe pourra s'écrire :

$$-d\theta=\frac{g}{c}\cos\alpha\,\Phi d\sigma-\frac{g}{c}\sin\alpha\,\sigma\Phi'\theta d\sigma$$
$$+\frac{g}{c}\sigma\left[\frac{\sigma\sin^2\alpha}{2\cos\alpha}\Phi''+\left(\frac{\cos\alpha}{2}+\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\right)\Phi'\right]\theta^2 d\sigma.$$

295. **Intégration du terme principal.** — 1° *Inclinaison*. — Le terme principal de l'hodographe a pour expression

$$-d\theta=\frac{g}{c}\cos\alpha\Phi d\sigma,$$

en négligeant les termes du 2e ordre en θ dans le second membre. Rétablissant la fonction F, il viendra

$$-d\theta=\frac{g}{c}\cos\alpha\frac{d\sigma}{\sigma F}.$$

Cette équation s'intègre à l'aide de la fonction balistique

$$\mathbf{J} = -\int_{\text{c}}^{\sigma} \frac{g\,d\sigma}{\sigma F}$$

où la variable est actuellement σ.

On a ainsi

$$-\theta = \frac{\cos\alpha}{c}(\mathbf{J}_0 - \mathbf{J}),$$

car pour $\tau = \alpha$, on a $\theta = 0$.

Mais, d'autre part, on a, d'après les développements en série

$$-\theta = (\lg\tau - \lg\alpha)\cos^2\alpha - \theta^2 \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdots$$

On aura donc, pour l'hodographe intégré

$$\lg\tau = \lg\alpha + \frac{1}{c\cos\alpha}(\mathbf{J}_0 - \mathbf{J}) - \theta^2 \frac{\sin\alpha}{\cos^3\alpha}\cdots$$

c'est-à-dire quand on néglige θ^2

$$\lg\tau = \lg\alpha + \frac{1}{c\cos\alpha}(\mathbf{J}_0 - \mathbf{J})$$

2° *Temps*. — L'équation (213)

$$dt = -\frac{u}{g}\frac{dt}{\cos^2\tau},$$

en remarquant que

$$\frac{1}{\cos^2\tau} = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 2\theta\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}.$$

et en introduisant la variable σ devient

$$dt = \frac{\sigma}{g \cos \alpha}(1 - 2\theta \operatorname{tg} \alpha)\, d\theta;$$

le terme principal sera

$$dt = \frac{\sigma d\theta}{g \cos \alpha}$$

qui, en remplaçant $d\theta$ par sa valeur, devient

$$dt = -\frac{1}{c}\frac{d\sigma}{F}.$$

On intégrera en introduisant la fonction $\mathbf{S}(\sigma)$ et il viendra

$$t = \frac{\mathbf{S} - \mathbf{S}_0}{c}.$$

3° *Abscisse*. — Le même mode de calcul appliqué à l'équation différentielle

$$dx = -\frac{u^2}{g}\frac{d\tau}{\cos^2 \tau}$$

conduit à la relation avec deux termes

$$dx = \frac{\sigma^2}{g}(1 - 2\theta \operatorname{tg} \alpha)\, d\theta$$

où le terme principal, seul conservé, donne

$$dx = -\frac{\cos \alpha}{c}\frac{\sigma d\sigma}{F}.$$

L'intégration introduit la fonction $\mathbf{D}$ et donne

$$x = \cos \alpha \frac{\mathbf{D} - \mathbf{D}_0}{c}$$

4° *Ordonnée.* — L'équation différentielle

$$dy = -\frac{u^2}{g} \operatorname{tg} \tau \frac{d\tau}{\cos^2 \tau}$$

en remplaçant $\operatorname{tg} \tau$ par sa valeur $\operatorname{tg} \alpha - \dfrac{\theta}{\cos^2 \alpha}$ s'écrira :

$$dy = \frac{u^2}{g} \operatorname{tg} \alpha \frac{d\theta}{\cos^2 \alpha} - \frac{u^2}{g} \theta \frac{d\theta}{\cos^4 \alpha}$$

et le terme principal est

$$dy = \frac{u^2}{g} \operatorname{tg} \alpha \frac{d\theta}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sigma^2}{g} \operatorname{tg} \alpha d\theta = -\frac{\sin \alpha}{c} \frac{\sigma d\sigma}{\mathbf{F}}.$$

On a donc, avec la fonction $\mathbf{D}(\sigma)$

$$y = \sin \alpha \frac{\mathbf{D} - \mathbf{D}_0}{c}.$$

5° *Résumé.* — Pour un arc quelconque, d'origine (V_0, α), les éléments des extrémités de l'arc sont données par les formules suivantes, réduites à leur premier terme, où la variable est la quantité :

$$\sigma = \frac{u}{\cos \alpha}.$$

$$\operatorname{tg} \tau = \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{c \cos \alpha} (\mathbf{J}_0 - \mathbf{J}); \qquad x = \cos \alpha \frac{\mathbf{D} - \mathbf{D}_0}{c};$$

$$t = \frac{\mathbf{S} - \mathbf{S}_0}{c}; \qquad y = \sin \alpha \frac{\mathbf{D} - \mathbf{D}_0}{c}$$

On y néglige un terme de l'ordre $(\alpha - \tau)^2$.

La variable $\sigma = \frac{v \cos \tau}{\cos \alpha}$ est égale à la projection MN parallèlement à la verticale, de la vitesse v sur la tangente à l'origine de la trajectoire.

La variable σ est parfois désignée (Siacci) sous le nom de *pseudo-vitesse* (255).

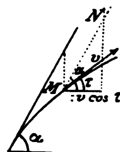


Fig. 78.

296. **Formules de Nivens et de Siacci.** — Il est nécessaire de s'arrêter sur la formule de l'ordonnée. En effet le problème qui vient d'être traité du calcul d'un arc quelconque de trajectoire (où τ n'est pas voisin de zéro) a été résolu par les auteurs de deux manières différentes.

Sous le nom de « formules de Nivens » on trouve, en effet, tout d'abord, à quelques détails près, les formules qui viennent d'être établies (293, 5°) et qui se distinguent des formules du tir de plein fouet par l'expression de l'ordonnée qui est simplement $y = x \operatorname{tg} \alpha$.

Siacci, dans sa Balistique (p. 54), résout le même problème en donnant à y la même forme que dans le cas du tir de plein fouet (219), c'est-à-dire

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{c^2} [\mathbf{A} - \mathbf{A}_0 - \mathbf{J}_0 (\mathbf{D} - \mathbf{D}_0)].$$

Cette dernière expression est fautive, car $x \operatorname{tg} \alpha$ est ici du premier ordre, et le terme du second ordre de y ne peut être introduit que si dans x, on conserve également le terme du second ordre.

297. **Calcul d'une trajectoire par arcs successifs.** — On peut se servir des formules du n° 293 pour le calcul d'une trajectoire par arcs successifs : cette

méthode aura même, sur les méthodes exposées aux nos 183 et suivants, de nombreux avantages de généralité d'application et de facilité des calculs.

En y joignant, dans le voisinage du sommet, par exemple pour le calcul de l'arc de $+5°$ à $-5°$, l'application des formules du tir de plein fouet, on aura un procédé très rapide de calcul d'une trajectoire par arcs.

Mais il ne faudra pas oublier, si on n'emploie pas le second terme de la série qui sera donnée au paragraphe suivant, qu'on doit prendre l'amplitude $(\tau_0 - \tau_1)$ de l'arc choisi pour le calcul avec les formules du n° 293 moins grand qu'avec les formules du tir de plein fouet.

En plus, il est aisé de voir que, si au lieu de développer les lignes trigonométriques (291) par rapport à l'inclinaison initiale α ou τ_0 de l'arc, on les développe par rapport à l'inclinaison moyenne $\frac{\tau_0 + \tau_1}{2} = \mu$, les formules restent les mêmes, mais que la variable τ est alors égale à $\sigma = \frac{u}{\cos\mu} = \frac{v\cos\tau}{\cos\mu}$. Dans ces conditions, les formules donneront une bien meilleure approximation, l'erreur commise étant positive sur une moitié de l'arc et négative sur l'autre moitié.

On écrira donc, comme formules pratiques du calcul d'un arc quelconque de trajectoire avec le premier terme de la série seul :

$$\operatorname{tg}\tau_1 = \operatorname{tg}\mu + \frac{1}{c\cos\mu}(\mathbf{J}_0 - \mathbf{J}_1); \qquad x = \cos\mu\,\frac{\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_0}{c};$$

$$t = \frac{\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_0}{c}; \qquad y = \sin\mu\,\frac{\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_0}{c};$$

avec $$\mu = \frac{\tau_0 + \tau_1}{2} \quad \text{et} \quad \sigma = \frac{v\cos\tau}{\cos\mu}.$$

§ 2. — Second terme de la série

298. **Équation de l'hodographe.** — Conservons maintenant, dans l'équation différentielle de l'hodographe le terme en θ^2 qui avait été négligé en première approximation. L'équation du n° 292 devient :

$$-d\theta = \frac{g}{c}\cos\alpha\,\Phi d\sigma - \frac{g}{c}\sin\alpha\,\sigma\Phi' d\sigma.$$

Rétablissons dans le premier membre la variable $d\tau = -d\theta$ et multiplions de part et d'autre par

$$\frac{1}{\cos^2\tau} = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 2\theta\frac{\sin\alpha}{\cos^3\alpha},$$

il viendra :

$$\frac{d\tau}{\cos^2\tau} = \left[\frac{g}{c}\Phi\cos\alpha - \frac{g}{c}\sigma\Phi'\theta\sin\alpha\right]\left[\frac{1}{\cos^2\alpha} - 2\theta\frac{\sin\alpha}{\cos^3\alpha}\right]d\sigma$$

ou, aux termes en θ^3 près

$$\frac{d\tau}{\cos^2\tau} = \frac{g}{c}\frac{1}{\cos\alpha}\Phi d\sigma - \frac{2g}{c}\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}\theta\left[\sigma\frac{\Phi'}{2} + \Phi\right]d\sigma.$$

Posons, d'après une notation déjà adoptée (277)

$$\Psi = \Phi + \frac{\sigma}{2}\Phi' = \frac{1}{2\sigma F}\left(1 - \frac{\sigma F'}{F}\right).$$

Il viendra :

$$\frac{d\tau}{\cos^2\tau} = \frac{g}{c\cos\alpha}\frac{d\sigma}{\sigma F} - \frac{2g}{c}\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}\theta\Psi d\sigma.$$

Mais il est permis, en négligeant encore un terme

en θ^3 dans le 2e membre, de remplacer θ par sa valeur principale

$$\theta = \frac{\cos\alpha}{c}(\mathbf{J} - \mathbf{J}_0)$$

de sorte qu'il viendra :

$$\frac{d\tau}{\cos^2\tau} = \frac{g}{c\cos\alpha}\frac{d\sigma}{\sigma F} + 2\frac{g}{c^2}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}(\mathbf{J}_0 - \mathbf{J})\Psi' d\sigma.$$

Introduisons alors les fonctions $\mathbf{J}^{\text{I}}$ et $\mathbf{J}^{\text{II}}$ définies au n° 277 par les relations

$$\mathbf{J}^{\text{I}}(\sigma) = \int_U^\sigma g\Psi' d\sigma, \qquad \mathbf{J}^{\text{II}}(\sigma) = \int_U^\sigma 2g\mathbf{J}\Psi' d\sigma$$

il viendra, pour l'intégrale de l'hodographe :

$$\operatorname{tg}\tau = \operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{c\cos\alpha}(\mathbf{J}_0 - \mathbf{J}) + \frac{1}{c^2}\operatorname{tg}\alpha\left[2\mathbf{J}_0(\mathbf{J}^{\text{I}} - \mathbf{J}^{\text{I}}_0) - (\mathbf{J}^{\text{II}} - \mathbf{J}^{\text{II}}_0)\right]$$

299. **Temps**. — Dans l'équation

$$dt = -\frac{u}{g}\frac{d\tau}{\cos^2\tau} = -\frac{\sigma\cos\alpha}{g}\frac{d\tau}{\cos^2\tau}$$

portons la valeur de $\frac{d\tau}{\cos^2\tau}$ avec deux termes ; on aura

$$dt = -\frac{d\sigma}{cF} - \frac{2}{c^2}\sin\alpha(\mathbf{J}_0 - \mathbf{J})\,\sigma\Psi' d\sigma.$$

Les définitions du n° 278 donnent pour les deux fonctions $\mathbf{S}^{\text{I}}$ et $\mathbf{S}^{\text{II}}$:

$$\mathbf{S}^{\text{I}}(\sigma) = \int_U^\sigma \sigma\Psi' d\sigma, \qquad \mathbf{S}^{\text{II}}(\sigma) = 2\int_U^\sigma \mathbf{J}\sigma\Psi' d\sigma.$$

Il viendra

$$t = \frac{\mathbf{S}-\mathbf{S}_0}{c} - \frac{\sin\alpha}{c^2}\left[2\mathbf{J}_0(\mathbf{S}^{\mathrm{I}}-\mathbf{S}_0^{\mathrm{I}})-(\mathbf{S}^{\mathrm{II}}-\mathbf{S}_0^{\mathrm{II}})\right]$$

300. **Abscisse.** — Pour l'abscisse on aura :

$$dx = -\frac{u^2}{g}\frac{d\tau}{\cos^2\tau}$$

$$dx = -\frac{\sigma d\sigma}{c\mathrm{F}}\cos\alpha - \frac{2}{c^2}\sin\alpha\cos\alpha\,(\mathbf{J}_0-\mathbf{J})\,\sigma^2\Psi d\sigma$$

d'où on tire

$$x = \cos\alpha\frac{\mathbf{D}-\mathbf{D}_0}{c} - \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{c^2}\left[2\mathbf{J}_0(\mathbf{D}^{\mathrm{I}}-\mathbf{D}_0^{\mathrm{I}})-(\mathbf{D}^{\mathrm{II}}-\mathbf{D}_0^{\mathrm{II}})\right]$$

avec (279)

$$\mathbf{D}^{\mathrm{I}}(\sigma) = \int_{\mathrm{U}}^{\sigma}\sigma^2\Psi d\sigma, \qquad \mathbf{D}^{\mathrm{II}}(\sigma) = 2\int_{\mathrm{U}}^{\sigma}\mathbf{J}\sigma^2\Psi d\sigma.$$

301. **Ordonnée.** — On a :

$$dy = -\frac{u^2}{g}\operatorname{tg}\tau\frac{d\tau}{\cos^2\tau}$$

en remplaçant $\operatorname{tg}\tau$ par $\operatorname{tg}\alpha - \dfrac{\theta}{\cos^2\alpha}$, il vient

$$dy = -\frac{u^2}{g}\frac{d\tau}{\cos^2\tau}\left[\operatorname{tg}\alpha - \frac{\theta}{\cos^2\alpha}\right]$$

ou

$$dy = \operatorname{tg}\alpha\,dx + \frac{\sigma^2}{g}\,\theta\,\frac{d\tau}{\cos^2\tau}$$

et dans le second membre, il suffira de remplacer θ et

$\dfrac{d\tau}{\cos^2\tau}$ par leurs valeurs principales. On a ainsi :

$$dy = \operatorname{tg}\alpha\, dx - \frac{1}{c^2}(\mathbf{J}_0 - \mathbf{J})\frac{\sigma d\tau}{\mathbf{F}}.$$

Intégrant, il viendra :

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{1}{c^2}\left[\mathbf{J}_0(\mathbf{D}_0 - \mathbf{D}) - (\mathbf{A}_0 - \mathbf{A})\right]$$

En remplaçant x par sa valeur, on aura l'expression totale de y en fonction de u.

302. **Résumé des formules.** —

Inclinaison : $\operatorname{tg}\tau = \operatorname{tg}\alpha + \dfrac{1}{c\cos\alpha}(\mathbf{J}_0 - \mathbf{J})$

$$+ \frac{1}{c^2}\operatorname{tg}\alpha\left[2\mathbf{J}_0(\mathbf{J}^{\text{I}} - \mathbf{J}^{\text{I}}_0) - (\mathbf{J}^{\text{II}} - \mathbf{J}^{\text{II}}_0)\right]$$

Temps : $t = \dfrac{\mathbf{S} - \mathbf{S}_0}{c}$

$$- \frac{1}{c^2}\sin\alpha\left[2\mathbf{J}_0(\mathbf{S}^{\text{I}} - \mathbf{S}^{\text{I}}_0) - (\mathbf{S}^{\text{II}} - \mathbf{S}^{\text{II}}_0)\right]$$

Abscisse : $x = \cos\alpha\dfrac{\mathbf{D} - \mathbf{D}_0}{c}$

$$- \frac{1}{c^2}\sin\alpha\cos\alpha\left[2\mathbf{J}_0(\mathbf{D}^{\text{I}} - \mathbf{D}^{\text{I}}_0) - (\mathbf{D}^{\text{II}} - \mathbf{D}^{\text{II}}_0)\right]$$

Ordonnée : $y = \sin\alpha\dfrac{\mathbf{D} - \mathbf{D}_0}{c}$

$$- \frac{1}{c^2}\sin^2\alpha\left[2\mathbf{J}_0(\mathbf{D}^{\text{I}} - \mathbf{D}^{\text{I}}_0) - (\mathbf{D}^{\text{II}} - \mathbf{D}^{\text{II}}_0)\right] - \frac{1}{c^2}\left[\mathbf{J}_0(\mathbf{D}_0 - \mathbf{D}) - (\mathbf{A}_0 - \mathbf{A})\right]$$

Le second terme de la série, dans le cas d'un arc quelconque de trajectoire, s'obtient donc par des formules

où entrent les six fonctions $\mathbf{J}^{\mathrm{I}}$, $\mathbf{J}^{\mathrm{II}}$, $\mathbf{S}^{\mathrm{I}}$, $\mathbf{S}^{\mathrm{II}}$, $\mathbf{D}^{\mathrm{I}}$, $\mathbf{D}^{\mathrm{II}}$ déjà rencontrées dans le tir de plein fouet ; mais ce terme n'est que du second ordre par rapport au premier, au lieu d'être du 3e comme dans le cas du tir de plein fouet.

On remarquera que toutes les expressions entre crochets tels que $\frac{1}{c^2}\left[2\mathbf{J}_0(\mathbf{J}^{\mathrm{I}} - \mathbf{J}_0^{\mathrm{I}}) - (\mathbf{J}^{\mathrm{II}} - \mathbf{J}_0^{\mathrm{II}})\right]$ sont du second ordre en $\theta = \alpha - \tau$. Cela résulte par exemple pour celle-ci de la formule

$$\frac{d\tau}{\cos^2\tau} = \frac{g}{c\cos\alpha}\,\frac{d\sigma}{\sigma F} - \frac{2g}{c}\,\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}\,\theta d\Psi\sigma$$

qui peut s'écrire

$$\frac{d\tau}{\cos^2\tau} = \frac{g}{c\cos\alpha}\,\frac{d\sigma}{\sigma F} + 2\,\frac{\sin\alpha}{\cos^3\alpha}\,\frac{\Psi}{\Phi}\,\theta d\theta$$

et

$$\frac{\Psi}{\Phi} = 1 - n.$$

On voit que quand α devient petit (tir de plein fouet) le 1er et le 3e terme du second membre de y deviennent de grandeur comparable et du 2e ordre par rapport à x. Le second terme au contraire est du 4e ; y se réduit donc bien à la forme du tir de plein fouet.

Si on prend le développement de l'hodographe (292) en y faisant $\alpha = 0$, il reste

$$-d\theta = \frac{g}{c}\Phi d\sigma + \frac{g}{2c}\sigma\Phi'\theta^2 d\sigma.$$

Si on multiplie par $\frac{1}{\cos^2\tau} = 1 + \tau^2$ et qu'on remplace θ^2 par τ^2, il vient

$$\frac{d\tau}{\cos^2\tau} = \frac{g}{c}\Phi du + \frac{g}{c}\left[\frac{u}{2}\Phi' + \Phi\right]\tau^2 du,$$

ce qui est bien l'équation de l'hodographe du tir de plein fouet (214).

303. **Théorème.** — *Quand on prend pour variable* $\sigma = \frac{u}{\cos\mu}$, *avec* $\mu = \frac{\tau_0 + \tau_1}{2}$ *et que* F(v) *peut être, sur la longueur de l'arc, remplacé par* $B_n v^n$, *n étant un exposant quelconque, le terme du second ordre de* tg τ *est nul.*

En effet, en posant $\tau = \mu - (\mu - \tau) = \mu - \theta$ on écrira l'équation de l'hodographe avec deux termes (296) :

$$\frac{d\tau}{\cos^2\tau} = \frac{g}{c\cos\mu}\frac{d\sigma}{\sigma F} - \frac{2g}{c}\frac{\sin\mu}{\cos^2\mu}\theta\frac{1}{2\sigma F}\left(1 - \frac{\sigma F'}{F}\right)d\sigma$$

ou

$$\frac{d\tau}{\cos^2\tau} = \frac{g}{c\cos\mu}\frac{d\sigma}{\sigma F} - \frac{g}{c}\frac{\sin\mu}{\cos^2\mu}(1 - n)\theta\frac{d\sigma}{\sigma F}$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{d\tau}{\cos^2\tau} = \frac{g}{c\cos\mu}\frac{d\sigma}{\sigma F} + (1 - n)\,\mathrm{tg}\,\mu\,\theta d\theta.$$

Intégrant, il viendra :

$$\mathrm{tg}\,\tau_1 = \mathrm{tg}\,\tau_0 + \frac{1}{c\cos\mu}(\mathbf{J}_0 - \mathbf{J}_1) + \frac{1-n}{2}\mathrm{tg}\,\mu\,(\theta_1^2 - \theta_0^2),$$

mais

$$\theta_0 = \mu - \tau_0 = \frac{\tau_1 - \tau_0}{2}, \qquad \theta_1 = \mu - \tau_1 = \frac{\tau_0 - \tau_1}{2}$$

et par suite $\theta_1^2 - \theta_0^2 = 0.$

Ainsi donc, quand on adopte la valeur $\mu = \frac{\tau_0 + \tau_1}{2}$

avec la variable σ, les formules du premier terme du n° 276 font connaître J_1, c'est-à-dire la vitesse v_1 à l'extrémité de l'arc avec une précision supérieure à celle fournie par les trois autres équations, puisqu'elles ne négligent qu'un terme en θ^2, si les variations de l'exposant n sur l'arc sont peu rapides.

304. **Exercices**. — 1° La série générale qui vient d'être développée admet trois cas particuliers (51) :

1° τ voisin de zéro (tir de plein fouet) ;

2° τ voisin de $\frac{\pi}{2}$ sur la branche ascendante (tir vertical de bas en haut) ;

3° τ voisin de $\frac{\pi}{2}$ sur la branche descendante (tir vertical de haut en bas).

Dans ces deux derniers tirs on suppose qu'on n'est dans le voisinage ni du point Ω de vitesse infinie, ni du point v' de vitesse terminale.

On prendra pour variable la vitesse verticale $v_y = v \sin\tau$. Les équations du mouvement s'écrivent :

$$\frac{d\tau}{\cos\tau} = \frac{dv_y}{v_y\left[1 + \frac{c}{g}F\left(\frac{v_y}{\sin\tau}\right)\right]}$$

$$dt = -\frac{v_y}{g}\frac{1}{\sin\tau}\frac{d\tau}{\cos\tau} = -\frac{1}{g}\frac{1}{\sin\tau}\frac{dv_y}{1 + \frac{c}{g}F\left(\frac{v_y}{\sin\tau}\right)},$$

$$dy = -\frac{v_y^2}{g}\frac{1}{\sin\tau}\frac{d\tau}{\cos\tau} = -\frac{1}{g}\frac{1}{\sin\tau}\frac{v_y\,dv_y}{1 + \frac{1}{g}F\left(\frac{v_y}{\sin\tau}\right)},$$

$$dx = -\frac{v_y^2}{g}\frac{d\tau}{\sin^2\tau} = -\frac{1}{g}\frac{1}{\sin^2\tau}\cos\tau\frac{v_y\,dv_y}{1 + \frac{c}{g}F\left(\frac{v_y}{\sin\tau}\right)}$$

On posera $\tau = \frac{\pi}{2} - \theta$, d'où $\sin\tau = 1 - \frac{\theta^2}{2}$ et on développera $F\left(\frac{v_y}{\sin\tau}\right)$ par la formule de Taylor.

Les premiers termes de la série seront donnés par les formules suivantes :

$$\cos\tau = \cos\alpha\, I_{v_0}^{v_y}, \quad \text{avec} \quad \text{Log}\, I_{v_0}^{v_y} = -\frac{c}{g}\int_{v_0}^{v_y} \frac{dv_y}{v_y\left(\frac{g}{c} + F\right)}$$

$$t = \frac{1}{c}\Sigma_{v_0}^{v_y}, \qquad \Sigma_{v_0}^{v_y} = \int_{v_0}^{v_y} \frac{dv_y}{\frac{g}{c} + F}$$

$$y = \frac{1}{c}\Delta_{v_0}^{v_y}, \qquad \Delta_{v_0}^{v_y} = \int_{v_0}^{v_y} \frac{v_y dv_y}{\frac{g}{c} + F}$$

$$x = \frac{1}{c}\cos\alpha\, X_{v_0}^{v_y}, \qquad X_{v_0}^{v_y} = \int_{v_0}^{v_y} I_{v_0}^{v_y}\frac{v_y dv_y}{\frac{g}{c} + F}$$

Les fonctions Σ et Δ sont celles du n° 60.

Des formules analogues existent pour le mouvement descendant, en changeant g en $-g$ dans les intégrales.

2° Ces intégrales peuvent s'obtenir sous forme finie dans les hypothèses $F(v) = B_2 v^2$ et $F(v) = B_1 v$[1].

3° Au voisinage du point $\left(-\frac{\pi}{2}, v'\right)$ on peut traiter le problème en faisant usage du développement indiqué au n° 108.

Posant $\tau = -\frac{\pi}{2} + \theta$ et $v = v' - \varepsilon$, on a obtenu l'hodographe sous la forme

$$\varepsilon = a\theta^n.$$

[1] M. de Sparre, *Mémorial de l'Artillerie de la marine*, t. XXIII, 1895, p. 633.

On aura donc :

$$v = v' - a\theta^n \qquad \text{avec} \qquad a = \frac{v' - V_0}{\theta_0^n}.$$

On obtiendra alors les autres éléments du mouvement par l'intégration des équations

$$gdt = -(v' - a\theta^n)\frac{d\theta}{\theta}$$

$$gdx = -(v' - 2a\theta^n)\,d\theta$$

$$gdy = -(v' - 2a\theta^n)\frac{d\theta}{\theta}$$

CHAPITRE XIII

LE TIR TENDU A GRANDE VITESSE

§ 1. — Formules du tir tendu

305. **Les deux développements en série.** — Après avoir étudié au chapitre précédent, au moyen des fonctions de Siacci, les environs d'un point de la trajectoire, en prenant comme point de départ un développement en série de nature essentiellement *trigonométrique*, nous nous proposons actuellement de faire connaître les deux autres développements qu'on peut obtenir autour d'un point de la trajectoire (150).

Ces développements considèrent la grandeur du rapport $\frac{cF}{g}$ de l'accélération de la résistance de l'air cF à celle de la pesanteur g.

Dans le *premier cas*, on supposera que le rapport est très grand; son inverse sera très petit et c'est cette quantité qui négligée d'abord, puis introduite à la première, puis à la deuxième puissance donnera la série cherchée, développée suivant les puissances ascendantes de l'inverse $\frac{1}{c}$ du coefficient balistique.

Le *second cas* supposera au contraire le rapport $\frac{cF}{g}$ très petit; la résistance de l'air sera très faible et le

même procédé d'approximations successives permettra d'obtenir le développement suivant les puissances ascendantes du coefficient balistique.

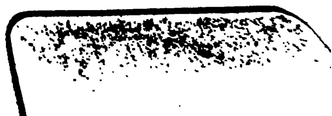
306 **Le tir tendu à grande vitesse.** — Le rapport $\frac{cF}{g}$ aura une valeur très grande, tendant vers l'infini à mesure qu'on s'éloignera en amont sur la branche ascendante vers le point Ω, et la série, réduite à un seul terme, répondra à la solution du problème dans cette région. Si on s'en éloigne, la même série en $\frac{1}{c}$, prise avec des termes de plus en plus nombreux, sera encore valable tant que le rapport $\frac{cF}{g}$ sera plus grand que l'unité. Après, c'est l'autre série, en c, qui deviendra d'un emploi légitime.

Le nom de tir *tendu à grande vitesse* donné à la série en $\frac{1}{c}$ rappelle la propriété limite dont jouit son premier terme.

307. **Recherche du premier terme de la série.** — 1° *Inclinaison.* — L'hodographe étant

$$du = \frac{cF}{g} v d\tau,$$

exigera, pour $\frac{cF}{g}$ très grand, qu'on ait $d\tau = 0$. C'est l'intégrale $\tau = \alpha$ qui correspond à la limite pour $v = \infty$. Cela veut dire que la trajectoire est sensiblement rectiligne et se confond avec la tangente. On peut aussi bien écrire $\operatorname{tg} \tau = \operatorname{tg} \alpha$.



$d\tau$ est un infiniment petit d'un ordre d'autant plus élevé que le degré de F en v est plus considérable.

2° *Temps*. — En portant l'hypothèse $\tau = \alpha$ dans les autres équations du mouvement, on obtiendra le premier terme pour chaque élément.

On a, pour le temps (122) :

$$dt = \frac{1}{g} \frac{dv}{\frac{cF}{g} + \sin \tau}.$$

$\frac{cF}{g}$ étant très grand relativement a $\sin \tau$, on écrira en multipliant haut et bas par $\frac{cF}{g} - \sin \tau$

$$dt = -\frac{dv}{cF} + \frac{g}{c^2} \sin \tau \frac{dv}{F^2}.$$

Le second terme est au premier dans un rapport de l'ordre de $\frac{g}{cF}$, qui est infiniment petit : on le néglige d'abord et le terme principal de la série est :

$$t = -\frac{1}{c} \int_{V_0}^{v} \frac{dv}{F}$$

ou en introduisant la fonction **S**.

$$t = \frac{\mathbf{S} - \mathbf{S}_0}{c} \qquad \text{(variable } v\text{)}.$$

3° *Abscisse*. — On a

$$dx = v \cos \tau \, dt.$$

Mais $\tau = \alpha$, en première approximation; on trouve donc

$$dx = -\cos\alpha\,\frac{vdv}{cF}$$

d'où

$$x = -\frac{\cos\alpha}{c}\int_{V_0}^{v}\frac{vdv}{F}$$

ou, en introduisant la fonction **D**,

$$x = \cos\alpha\,\frac{\mathbf{D}-\mathbf{D}_0}{c} \qquad \text{(variable } v\text{)}.$$

4° *Ordonnée*. — On a

$$dy = v\sin\tau\,dt$$

d'où, par le même raisonnement

$$y = \sin\alpha\,\frac{\mathbf{D}-\mathbf{D}_0}{c} \qquad \text{(variable } v\text{)}.$$

5° *Résumé*. — Les formules des premiers termes du *tir tendu à grande vitesse* sont donc

$$\operatorname{tg}\tau = \operatorname{tg}\alpha, \qquad x = \cos\alpha\,\frac{\mathbf{D}-\mathbf{D}_0}{c}$$

$$t = \frac{\mathbf{S}-\mathbf{S}_0}{c}, \qquad y = \sin\alpha\,\frac{\mathbf{D}-\mathbf{D}_0}{c} \qquad \text{(variable } v\text{)}.$$

308. **Second terme de la série**. — 1° *Inclinaison*. — On va introduire maintenant l'hypothèse que τ n'est pas tout à fait égal à α. L'hodographe, en développant du, s'écrit

$$\cos\tau\,dv - v\sin d\tau = \frac{cF}{g}\,vd\tau.$$

Mais $v \sin\tau\, d\tau$ est infiniment petit par rapport à $\frac{cF}{g}\, v d\tau$ et l'hodographe se réduit à

$$\cos\tau\, dv = \frac{cF}{g}\, v d\tau$$

qu'on écrira

$$\frac{d\tau}{\cos^2\tau} = \frac{g}{\cos\tau}\,\frac{dv}{cv\,F}.$$

Mais, dans le second membre, puisqu'il s'agit du deuxième terme de la série, $\cos\tau$ doit être remplacé par $\cos\alpha$ et en intégrant, il viendra

$$\operatorname{tg}\tau = \operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{c\cos\alpha}\int_{V_0}^{v} g\,\frac{dv}{vF},$$

ou, en introduisant la fonction

$$\mathbf{J}(v) = -\int_{V}^{v} g\,\frac{dv}{vF}$$

$$\operatorname{tg}\tau = \operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{c\cos\alpha}\,(\mathbf{J}_0 - \mathbf{J}) \qquad \text{(variable } v\text{)}.$$

2° *Temps*. — Nous avons trouvé l'équation différentielle

$$dt = -\frac{dv}{cF} + \frac{g}{c^2}\sin\tau\,\frac{dv}{F^2}.$$

Il suffit de faire $\sin\tau = \sin\alpha$ pour obtenir l'intégrale

$$t = \frac{\mathbf{S} - \mathbf{S}_0}{c} - g\,\frac{\sin\alpha}{c^2}\,(s - s_0)$$

en posant, comme définition d'une nouvelle fonction balistique

$$s(v) = -\int_{V}^{v}\frac{dv}{F^2}.$$

3° *Abscisse.* — L'abscisse est un peu plus compliquée, car on a

$$dx = v \cos \tau \, dt = -\frac{vdv}{cF} \cos \tau + \frac{g}{c^2} \sin \tau \cos \tau \frac{vdv}{F^2}$$

et, dans le premier terme du second membre, entre $\cos \tau$ qu'on n'a plus le droit ici de remplacer par $\cos \alpha$, puisqu'on négligerait un terme en $\frac{g}{c}$. Posant $\tau = \alpha - (\alpha - \tau)$ on aura

$$\cos \tau = \cos \alpha + \sin \alpha \sin (\alpha - \tau).$$

Mais l'hodographe peut s'écrire

$$\tau = \alpha + \frac{\cos \alpha}{c} (\mathbf{J}_0 - \mathbf{J}).$$

Donc $$\cos \tau = \cos \alpha - \sin \alpha \frac{\cos \alpha}{c} (\mathbf{J}_0 - \mathbf{J}).$$

On aura ainsi

$$dx = -\frac{\cos \alpha}{c} \frac{vdv}{cF} - \frac{g}{c^2} \sin \alpha \cos \alpha \left[\frac{1}{g} (\mathbf{J}_0 - \mathbf{J}) \frac{vdv}{F} - \frac{vdv}{F^2} \right]$$

L'intégration donnera

$$x = \cos \alpha \frac{\mathbf{D} - \mathbf{D}_0}{c}$$
$$- \frac{g}{c^2} \sin \alpha \cos \alpha \left[\frac{1}{g} [\mathbf{J}_0 (\mathbf{D}_0 - \mathbf{D}) - (\mathbf{A}_0 - \mathbf{A})] + \mathfrak{Q} - \mathfrak{Q}_0 \right]$$

en posant la fonction connue

$$\mathbf{A} = -\int_V^v \mathbf{J} \frac{vdv}{F} \qquad (v \text{ variable}).$$

ce qui est bien l'équation de l'hodographe du tir de plein fouet (214).

303. **Théorème.** — *Quand on prend pour variable* $\sigma = \frac{u}{\cos\mu}$, *avec* $\mu = \frac{\tau_0 + \tau_1}{2}$ *et que* $F(v)$ *peut être, sur la longueur de l'arc, remplacé par* $B_n v^n$, *n étant un exposant quelconque, le terme du second ordre de* $\operatorname{tg}\tau$ *est nul.*

En effet, en posant $\tau = \mu - (\mu - \tau) = \mu - \theta$ on écrira l'équation de l'hodographe avec deux termes (296) :

$$\frac{d\tau}{\cos^2\tau} = \frac{g}{c\cos\mu}\frac{d\sigma}{\sigma F} - \frac{2g}{c}\frac{\sin\mu}{\cos^2\mu}\theta\frac{1}{2\sigma F}\left(1 - \frac{\sigma F'}{F}\right)d\sigma$$

ou

$$\frac{d\tau}{\cos^2\tau} = \frac{g}{c\cos\mu}\frac{d\sigma}{\sigma F} - \frac{g}{c}\frac{\sin\mu}{\cos^2\mu}(1 - n)\theta\frac{d\sigma}{\sigma F}$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{d\tau}{\cos^2\tau} = \frac{g}{c\cos\mu}\frac{d\sigma}{\sigma F} + (1 - n)\operatorname{tg}\mu\,\theta d\theta.$$

Intégrant, il viendra :

$$\operatorname{tg}\tau_1 = \operatorname{tg}\tau_0 + \frac{1}{c\cos\mu}(\mathbf{J}_0 - \mathbf{J}_1) + \frac{1-n}{2}\operatorname{tg}\mu(\theta_1^2 - \theta_0^2),$$

mais

$$\theta_0 = \mu - \tau_0 = \frac{\tau_1 - \tau_0}{2}, \qquad \theta_1 = \mu - \tau_1 = \frac{\tau_0 - \tau_1}{2}$$

et par suite $$\theta_1^2 - \theta_0^2 = 0.$$

Ainsi donc, quand on adopte la valeur $\mu = \frac{\tau_0 + \tau_1}{2}$

avec la variable σ, les formules du premier terme du n° 276 font connaître $\mathbf{J}_1$, c'est-à-dire la vitesse v_1 à l'extrémité de l'arc avec une précision supérieure à celle fournie par les trois autres équations, puisqu'elles ne négligent qu'un terme en θ^2, si les variations de l'exposant n sur l'arc sont peu rapides.

304. **Exercices**. — 1° La série générale qui vient d'être développée admet trois cas particuliers (51) :

1° τ voisin de zéro (tir de plein fouet) ;

2° τ voisin de $\frac{\pi}{2}$ sur la branche ascendante (tir vertical de bas en haut) ;

3° τ voisin de $\frac{\pi}{2}$ sur la branche descendante (tir vertical de haut en bas).

Dans ces deux derniers tirs on suppose qu'on n'est dans le voisinage ni du point Ω de vitesse infinie, ni du point v' de vitesse terminale.

On prendra pour variable la vitesse verticale $v_y = v \sin \tau$. Les équations du mouvement s'écrivent :

$$\frac{d\tau}{\cos\tau} = \frac{dv_y}{v_y\left[1 + \frac{c}{g}F\left(\frac{v_y}{\sin\tau}\right)\right]}$$

$$dt = -\frac{v_y}{g}\frac{1}{\sin\tau}\frac{d\tau}{\cos\tau} = -\frac{1}{g}\frac{1}{\sin\tau}\frac{dv_y}{1+\frac{c}{g}F\left(\frac{v_y}{\sin\tau}\right)},$$

$$dy = -\frac{v_y^2}{g}\frac{1}{\sin\tau}\frac{d\tau}{\cos\tau} = -\frac{1}{g}\frac{1}{\sin\tau}\frac{v_y\,dv_y}{1+\frac{1}{g}F\left(\frac{v_y}{\sin\tau}\right)},$$

$$dx = -\frac{v_y^2}{g}\frac{d\tau}{\sin^2\tau} = -\frac{1}{g}\frac{1}{\sin^2\tau}\cos\tau\frac{v_y\,dv_y}{1+\frac{c}{g}F\left(\frac{v_y}{\sin\tau}\right)}$$

Supposons que y soit développable suivant les puissances ascendantes de $\frac{g}{c}$ et soit le développement effectué sous la forme

$$gy = Y_0 + \frac{g}{c} Y_1 + \left(\frac{g}{c}\right)^2 Y_2 + \ldots + \left(\frac{g}{c}\right)^n Y_n$$

Y_0, $Y_1 \ldots$ Y_n étant des fonctions inconnues de v qu'il s'agit de déterminer ; leurs dérivées sont Y'_0, Y''_0, $Y'_1, Y''_1 \ldots$ La méthode consistera à former y''_v et y'_v au moyen de ce développement, à substituer dans l'équation différentielle et à égaler séparément à zéro chacune des puissances de $\frac{g}{c}$. On aura ainsi une série d'équations différentielles à résoudre, qui donneront les termes successifs de la série.

Y'_0 *est nul.* — En effet, l'équation qui donne

$$\sin \tau = -\frac{cFy'_v}{v + gy'_v}$$

établie au n° 93, permet d'écrire

$$gy'_v = -\frac{v \sin \tau}{\frac{cF}{g} + \sin \tau}$$

ou, en effectuant la division :

$$gy'_v = -\frac{g}{c}\frac{v \sin \tau}{F} + \left(\frac{g}{c}\right)^2 \frac{v \sin^2 \tau}{F^2} \ldots\ldots (-1)^n \left(\frac{g}{c}\right)^n \frac{v \sin^n \tau}{F^n}$$

On voit ainsi que le développement de gy'_v suivant les puissances ascendantes de $\frac{g}{c}$ ne doit pas contenir de terme indépendant de $\frac{g}{c}$. On posera donc :

$$gy'_v = \frac{g}{c} Y'_1 + \left(\frac{g}{c}\right)^2 Y'_2 + \left(\frac{g}{c}\right)^3 Y'_3 + \ldots\ldots + \left(\frac{g}{c}\right)^n Y'_n.$$

311. **Détermination des fonctions.** — En formant gy_2'' et portant sa valeur ainsi que celle de gy_2' dans l'équation différentielle, puis en égalant à zéro les coefficients de $\frac{g}{c}$, $\left(\frac{g}{c}\right)^2$, $\left(\frac{g}{c}\right)^3$..., on trouve les formules suivantes :

$$v^3Y_1'' + v^2Y_1'\left(\frac{vF'}{F} - 1\right) = 0$$

$$v^3Y_2'' + v^2Y_2'\left(\frac{vF'}{F} - 1\right) + vY_1'^2\left(\frac{vF'}{F} - 1\right) + \frac{v^3}{F^2} = 0$$

$$v^3Y_3'' + v^2Y_3'\left(\frac{vF'}{F} - 1\right) + 2vY_1'Y_2' - Y_1'^3 + \frac{3v^2Y_1'}{F^2} = 0$$

$$v^3Y_4'' + v^2Y_4'\left(\frac{vF'}{F} - 1\right) + P \qquad = 0$$

. . . .

P est une fonction de v connue quand les équations qui précèdent ont été résolues. Or, on sait résoudre l'équation différentielle générale :

$$v^3Y_n'' + v^2Y_n'\left(\frac{vF'}{F} - 1\right) + P = 0.$$

L'intégrale de l'équation sans second membre est en effet :

$$Y_n' = K\frac{v}{F}$$

K étant une constante.

Considérant K comme une fonction inconnue de v et la portant dans l'équation différentielle, on aura :

$$\frac{dK}{dv} = -\frac{PF}{v^4}$$

et par suite :

$$K = K_n - \int\frac{PF}{v^4}\,dv$$

d'où : $$Y_n' = K_n\frac{v}{F} - \frac{v}{F}\int_{V_0}^{v}\frac{PF}{v^4}\,dv.$$

Pour déterminer la constante K, il suffit de rapprocher les deux séries écrites à la fin du numéro précédent, qui donnent $Y'_n = (-1)^n \frac{v \sin^n \tau}{F^n}$.

Pour $v = V_0$, on aura

$$Y'_n = K_n \frac{V_0}{F_0}$$

ou

$$K_n = (-1)^n \frac{\sin^n \alpha}{F_0^{n-1}}.$$

1° *Calcul de* Y'_1 *et de* Y_1. — Faisant $P = 0$ dans la formule générale :

$$Y'_n = K_n \frac{v}{F} - \frac{v}{F} \int_{V_0}^{v} \frac{PFdv}{v^4},$$

il reste

$$Y'_1 = K_1 \frac{v}{F} = -\sin \alpha \frac{v}{F}.$$

On aura donc :

$$Y_1 = -\sin \alpha \int_{V_0}^{v} \frac{vdv}{F}$$

c'est-à-dire :

$$Y_1 = \sin \alpha (\mathbf{D} - \mathbf{D}_0).$$

2° *Calcul de* Y'_2 *et de* Y_2. — Faisant

$$P = vY_1'^2 \left(\frac{vF'}{F} - 1\right) + \frac{v^3}{F^2} = \frac{v^3}{F^2} \left(\frac{vF'}{F} - 1\right) \sin^2 \alpha + \frac{v^3}{F^2},$$

il viendra :

$$Y'_2 = \frac{\sin^2 \alpha}{F_0} \frac{v}{F} - \frac{v}{F} \sin^2 \alpha \int_{V_0}^{v} \left(\frac{vF'}{F} - 1\right) \frac{dv}{vF} + \frac{v}{F} \int_{V_0}^{v} \frac{dv}{vF}$$

$$= \frac{\sin^2 \alpha}{F_0} \frac{v}{F} - \frac{v}{F} \sin^2 \alpha \left(\frac{1}{F_0} - \frac{1}{F}\right) - \frac{v}{F} \frac{\cos^2 \alpha}{g} (\mathbf{J}_0 - \mathbf{J})$$

$$= \sin^2 \alpha \frac{v}{F^2} - \frac{\cos^2 \alpha}{g} \frac{v}{F} (\mathbf{J}_0 - \mathbf{J}).$$

Intégrant, pour avoir Y_2, on obtiendra :

$$Y_2 = \sin^2\alpha \int_{V_0}^{v} \frac{vdv}{F^2} - \frac{\cos^2\alpha}{g} \mathbf{J}_0 \int_{V_0}^{v} \frac{vdv}{F} + \frac{\cos^2\alpha}{g} \int_{V_0}^{v} \mathbf{J} \frac{vdv}{F}$$

c'est-à-dire, en introduisant les mêmes fonctions balistiques qu'au n° 306 :

$$Y_2 = \sin^2\alpha \, (\mathcal{D}_0 - \mathcal{D}) - \frac{\cos^2\alpha}{g} [\mathbf{J}_0 (\mathbf{D}_0 - \mathbf{D}) - (\mathbf{A}_0 - \mathbf{A})].$$

3° *Premiers termes de la série.* — Comme

$$y = \frac{Y_1}{c} + \frac{g}{c^2} Y_2 + \ldots,$$

on aura :

$$y = \sin\alpha \frac{\mathbf{D} - \mathbf{D}_0}{c}$$

$$- \frac{g}{c^2} \sin^2\alpha \left[\frac{\cot g^2\alpha}{g} \mathbf{J}_0 (\mathbf{D}_0 - \mathbf{D}) - (\mathbf{A}_0 - \mathbf{A}) + \mathcal{D}_0 - \mathcal{D} \right].$$

C'est exactement la formule qui donne y au n° 306, 5°.

312. **Autres éléments**. — On a les équations différentielles :

$$\frac{d\tau}{\cos^2\tau} = \frac{dv}{v \cos\tau \left(\frac{cF}{g} + \sin\tau \right)} ; \qquad dx = - \frac{v}{g} \frac{\cos\tau \, dv}{\frac{cF}{g} + \sin\tau} ;$$

$$dt = - \frac{1}{g} \frac{dv}{\frac{cF}{g} + \sin\tau} .$$

Mais, d'autre part :

$$\sin\tau = - \frac{cF}{g} \frac{gy'}{v + gy'} = - \frac{cF}{g} \frac{\frac{g}{c} Y'_1 + \left(\frac{g}{c}\right)^2 Y'_2 + \cdots}{v + \frac{g}{c} Y_1 + \left(\frac{g}{c}\right)^2 Y'^2 + \cdots}$$

d'où : $\dfrac{cF}{g} + \sin\tau = \dfrac{cF}{g} \dfrac{v}{v + \dfrac{g}{c} Y'_1 + \left(\dfrac{g}{c}\right)^2 Y_2}$.

Les formules deviennent donc :

$$\frac{d\tau}{\cos^2\tau} = \frac{dv}{\cos\tau} \frac{g}{cFv^2} \left[v + \frac{g}{c} Y'_1 + \left(\frac{g}{c}\right)^2 Y'_2 + \cdots\right]$$

$$dx = -\frac{dv}{cF} \cos\tau \left[v + \frac{g}{c} Y'_1 + \left(\frac{g}{c}\right)^2 Y'_2 + \cdots\right]$$

$$dt = -\frac{dv}{cFv} \left[v + \frac{g}{c} Y'_1 + \left(\frac{g}{c}\right)^2 Y'_2 + \cdots\right]$$

De la formule qui donne $\sin\tau$, on déduira $\sin^2\tau$, puis $1 - \sin^2\tau$, puis, en extrayant la racine, $\cos\tau$ développé suivant les puissances de $\left(\dfrac{g}{c}\right)$. Portant dans les équations ci-dessus, faisant les calculs et les réductions (le nombre de termes voulus en $\dfrac{c}{g}$ étant conservés), puis remplaçant Y'_1. Y'_2... par leurs expressions connues, et enfin intégrant, on aura le développement de $\operatorname{tg}\tau$, x et t suivant les puissances ascendantes de l'inverse du coefficient balistique. Ces formules coïncident avec celles du n° 306.

313. **Sur la convergence de ces séries**. — Les formules du § 1 ont été obtenues explicitement en supposant que $\dfrac{g}{cF}$ est une quantité petite. La convergence des séries serait donc limitée aux points de la trajectoire où $\dfrac{g}{cF} < 1$.

Le colonel Jacob, au contraire, dans les formules du § 2, partant de l'hypothèse que gy'_v est égal à $-\dfrac{v}{cF} \dfrac{\sin\tau}{1 + \dfrac{g\sin\tau}{cF}}$

admet que, pour que ce développement en série convergente soit possible suivant les puissances ascendantes de $\frac{1}{c}$, il faut que l'on ait $\frac{g \sin \tau}{cF} < 1$, auquel cas on écrira :

$$g y'_\tau = -\frac{g}{c} \frac{\sin \tau}{cF} + \left(\frac{g}{c}\right)^2 \frac{\sin^2 \tau}{(cF)^2} + \dots$$

Comme on arrive par les deux raisonnements aux mêmes équations, les hypothèses ne doivent donc pas différer au fond. On peut remarquer que les limites de convergence données par la règle du colonel Jacob sont beaucoup plus larges que celles qui résultent de la condition $\frac{g}{cF} = 1$, à cause de la petitesse du sinus qui, au voisinage du sommet rend le facteur $g \sin \tau$ particulièrement petit. Comme le point défini par la relation $\sin \tau = \frac{cF}{g}$ est le point de vitesse minimum, on peut dire que si, sur la branche ascendante. à l'origine de la trajectoire, on a $\frac{g \sin \alpha}{cF_0} < 1$, le développement en $\left(\frac{g}{c}\right)$ sera convergent jusqu'au point de vitesse minimum.

CHAPITRE XIV

LE TIR COURBE A FAIBLE VITESSE

§ 1. — Formules du premier terme

314. **Énoncé du problème.** — Le cas du tir courbe à faible vitesse considère le développement des équations du mouvement suivant les puissances croissantes du coefficient balistique c. Il suppose que, sur toute l'étendue de trajectoire considérée, le rapport $\frac{cF}{g}$ de la résistance de l'air à la gravité reste petit et inférieur à l'unité.

On conçoit que le développement en série auquel conduisent les calculs comportera, comme terme principal, les formules mêmes du vide, puisque la gravité g subsisterait comme seule force agissante, quand $cF(v)$ déjà supposé très petit, s'annulerait à la limite. Les termes suivants représenteront l'influence de la résistance de l'air et, dans la pratique, le nombre des termes à conserver variera avec la grandeur relative de cF et de g et aussi avec la précision numérique que l'on désire atteindre.

Le *tir courbe à faible vitesse* est applicable au tir des mortiers, où les projectiles sont très lourds (c petit) et la vitesse faible ($F(v)$ petit); on pourra alors traiter

le problème, avec une loi de résistance quelconque, à condition d'avoir calculé au préalable les tables nécessaires.

Supposons donc que, sur la portion utile de la trajectoire considérée, soit, pour fixer des idées depuis l'angle de projection α jusqu'à l'angle de chute ω, le quotient $\frac{cF}{g}$ soit une très petite quantité relativement à l'unité. D'ailleurs, dans cette trajectoire limitée que nous examinons, qui va de l'origine au point de chute, il suffira, puisque $V_0 > V_\omega$, que le quotient $\frac{cF(V_0)}{g}$ soit petit, car c'est la plus grande valeur qu'entre ces limites puisse prendre le quotient $\frac{cF}{g}$.

315. **Développement de l'hodographe**. — Soit donc l'équation différentielle de l'hodographe

$$du = \frac{c}{g} vF(v)d\tau.$$

Si $\frac{cF}{g}$ est une quantité très petite, tendant à la limite vers zéro, l'intégrale de cette équation différentielle sera $du = 0$ ou $u = u_0$. C'est la propriété de la conservation de la vitesse horizontale, caractéristique du mouvement dans le vide. En portant cette intégrale dans les autres équations du mouvement, on obtiendrait évidemment les formules du vide. Elles constituent donc, dans le développement suivant les puissances ascendantes du coefficient balistique c, le terme indépendant de cet élément.

Cherchons maintenant le terme en c à la première

puissance et pour cela posons $u = u_0 - (u_0 - u)$.

L'hodographe peut s'écrire identiquement

$$du = \frac{c}{g}\, u\mathrm{F}\left(\frac{u}{\cos\tau}\right) \frac{d\tau}{\cos\tau},$$

ou bien

$$du = \frac{c}{g}\, [u_0 - (u_0 - u)]\,\mathrm{F}\left(\frac{u_0}{\cos\tau} - \frac{u_0 - u}{\cos\tau}\right) \frac{d\tau}{\cos\tau}.$$

Développons alors la fonction F par la formule de Taylor; en négligeant les termes en $(u_0 - u)^2$, il viendra :

$$du = \frac{c}{g}\, u_0\, \mathrm{F}\left(\frac{u_0}{\cos\tau}\right) \frac{d\tau}{\cos\tau}$$

$$- \frac{c}{g}(u_0 - u)\left[\mathrm{F}\left(\frac{u_0}{\cos\tau}\right) \pm \frac{u_0}{\cos\tau}\mathrm{F}'\left(\frac{u_0}{\cos\tau}\right)\right]\frac{d\tau}{\cos\tau} + \cdots$$

Posons enfin

$$\mathcal{F}\left(\frac{u_0}{\cos\tau}\right) = \mathrm{F}\left(\frac{u_0}{\cos\tau}\right) + \frac{u_0}{\cos\tau}\,\mathrm{F}'\left(\frac{u_0}{\cos\tau}\right)$$

On obtiendra l'équation différentielle de l'hodographe sous la forme

$$du = \frac{c}{g}\, u_0 \mathrm{F}\left(\frac{u_0}{\cos\tau}\right) \frac{d\tau}{\cos\tau} - \frac{c}{g}\,(u_0 - u)\,\mathcal{F}\left(\frac{u_0}{\cos\tau}\right)\frac{d\tau}{\cos\tau}$$
$$+ \frac{c^2}{g^2}\,(u_0 - u)^2[\ldots]\ldots$$

Tel est le développement de l'équation différentielle de l'hodographe suivant les puissances ascendantes de c.

316. **Terme en $\frac{c}{g}$ de l'hodographe.** — La fonction

$F\left(\frac{u_0}{\cos\tau}\right)$ ne dépend, puisque u_0 est une constante, que de la variable τ. Il en sera de même de la fonction $F\left(\frac{u_0}{\cos\tau}\right)d\tau$. Posons donc, comme définition d'une certaine intégrale

$$\xi(\tau) = \int_0^\tau F\left(\frac{u_0}{\cos\tau}\right)d\tau.$$

$\xi(\tau)$ sera une fonction de la variable τ et de la constante u_0. L'intégration du premier terme de l'hodographe se fera alors sous la forme

$$u = u_0 - \frac{c}{g}u_0(\xi(\alpha) - \xi(\tau)).$$

On peut encore écrire :

$$u - \frac{c}{g}u_0\xi(\tau) = u_0 - \frac{c}{g}u_0\xi(\alpha).$$

317. **Eléments d'un point quelconque.** — Portons la valeur de u,

$$u = u_0 - \frac{c}{g}u_0[\xi(\alpha) - \xi(\tau)]$$

ou celle qui en résulte pour u^2 :

$$u^2 = u_0^2 - 2\frac{c}{g}u_0^2[\xi(\alpha) - \xi(\tau)]$$

dans les trois autres équations du mouvement

$$dt = -\frac{u}{g}\frac{d\tau}{\cos\tau};\, dx = -\frac{u^2}{g}\frac{d\tau}{\cos\tau};\, dy = -\frac{u^2}{g}\operatorname{tg}\tau\frac{d\tau}{\cos^2\tau}$$

on obtiendra le système suivant :

$$u = u_0 \qquad - \frac{c}{g} u_0 [\xi(\alpha) - \xi(\tau)]$$

$$t = \frac{u_0}{g} (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \tau) + \frac{u_0}{g} \frac{c}{g} [\chi(\alpha) - \chi(\tau) - \xi(\alpha) (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \tau)]$$

$$x = \frac{u_0^2}{g} (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \tau) + 2 \frac{u_0^2}{g} \frac{c}{g} [\chi(\alpha) - \chi(\tau) - \xi(\alpha) (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \tau)]$$

$$y = \frac{u_0^2}{2g} (\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \tau) + 2 \frac{u_0^2}{g} \frac{c}{g} \left[\zeta(\alpha) - \zeta(\tau) - \frac{1}{2} \xi(\alpha) (\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \tau)\right]$$

Les premiers termes du second membre sont les éléments du vide. Dans ces formules, figurent trois fonctions de l'inclinaison τ et de la constante u_0, ayant les définitions suivantes :

$$\xi(\tau) = \int_0^\tau F\left(\frac{u_0}{\cos \tau}\right) \frac{d\tau}{\cos \tau},$$

$$\chi(\tau) = \int_0^\tau \xi(\tau) \frac{d\tau}{\cos^2 \tau}, \qquad \zeta(\tau) = \int_0^\tau \xi(\tau) \operatorname{tg} \tau \frac{d\tau}{\cos^2 \tau}.$$

Quand on connaît la fonction $F(v)$, on peut calculer, par une méthode quelconque de quadrature, des tables de ces intégrales ; ces tables, si $F(v)$ est quelconque, seront à double entrée, u_0 et τ. Elles permettront de résoudre numériquement le problème de la recherche d'un élément quelconque d'un arc de trajectoire.

318. **Calcul des fonctions $\xi(\tau)$, $\chi(\tau)$ et $\zeta(\tau)$.** — Soit par exemple la fonction $F(v)$ représentée par un polynôme ordonné suivant les puissances de v.

$$F(v) = A_n v^n + A_{n+1} v^{n+1} \ldots + A_p v^p.$$

On aura alors

$$F\left(\frac{u_0}{\cos\tau}\right)=A_n u_0^n \frac{1}{\cos^n\tau}+A_{n+1}u_0^{n+1}\frac{1}{\cos^{n+1}\tau}\cdots+A_p u_0^p \frac{1}{\cos^p\tau}$$

d'où

$$\begin{aligned}\xi(\tau)&=A_n u_0^n\,\xi_n(\tau)+A_{n+1}u_0^{n+1}\,\xi_{n+1}(\tau)\ldots\quad+A_p\,u_0^p\,\xi_p(\tau)\\ \chi(\tau)&=A_n u_0^n\,\chi_n(\tau)+A_{n+1}u_0^{n+1}\,\chi_{n+1}(\tau)\ldots\quad+A^p\,u_0^p\,\chi_p(\tau)\\ \zeta(\tau)&=A_n u_0^n\,\zeta_n(\tau)+A_{n+1}u_0^{n+1}\,\zeta_{n+1}(\tau)\ldots\quad+A_p\,u_0^p\,\zeta_p(\tau)\end{aligned}$$

Les notations $\xi_i(\tau)$, $\chi_i(\tau)$ et $\zeta_i(\tau)$ indiquent ce que deviennent les fonctions $\xi(\tau)$, $\chi(\tau)$ et $\zeta(\tau)$ dans le cas d'une résistance $B_n\,v_n$; ce sont ces valeurs qu'il faut maintenant calculer.

1° $\xi_n(\tau)$. — Si on a $F(v) = B_n\,v^n$, il viendra

$$F\left(\frac{u_0}{\cos\tau}\right)=\frac{B_n\,u_0^n}{\cos^n\tau}$$

et par suite

$$\xi(\tau)=\int_0^\tau F\left(\frac{u_0}{\cos\tau}\right)\frac{d\tau}{\cos\tau}=B_n\,u_0^n\int_0^\tau\frac{d\tau}{\cos^{n+1}\tau}=B_n\,u_0^n\,\xi_n(\tau).$$

$\xi_n(\tau)$ étant la fonction déjà considérée sous cette notation dans la théorie d'Euler. On sait comment on peut en dresser des tables (159).

2° $\chi_n(\tau)$. — On a $\quad\chi_n(\tau)=\int_0^\tau \xi_n(\tau)\,\frac{d\tau}{\cos^2\tau}$.

Intégrant par parties, il vient

$$\begin{aligned}\chi_n(\tau)&=\xi_n(\tau)\operatorname{tg}\tau-\int_0^\tau \sin\tau\,\frac{d\tau}{\cos^{n+2}\tau}\\ &=\xi(\tau)\operatorname{tg}\tau-\frac{1}{n+1}\left[\frac{1}{\cos^{n+1}\tau}-1.\right]\end{aligned}$$

La fonction $\chi_n(\tau)$ est donc ramenée à des fonctions connues.

3° $\zeta_n(\tau)$. — On a $\zeta_n(\tau) = \int_0^\tau \xi_n(\tau) \operatorname{tg} \tau \frac{d\tau}{\cos^2 \tau}$

Intégrant par parties, il vient

$$\zeta_n(\tau) = \frac{1}{2}\xi_n(\tau) \operatorname{tg}^2\tau - \frac{1}{2}\int_0^\tau \operatorname{tg}^2\tau \frac{d\tau}{\cos^{n+1}\tau} = \frac{1}{2}\xi_n(\tau)\frac{1}{\cos^2\tau} - \frac{1}{2}\xi_{n+2}(\tau)$$

$\zeta_n(\tau)$ est donc connu et calculable.

Exercices. — Trouver les développements en série suivant les puissances de τ des fonctions $\xi(\tau)$, $\chi(\tau)$ et $\zeta(\tau)$, dans le cas général.

§ 2. — Sommet et point de chute

319. **Sommet.** — En faisant $\tau = 0$ dans les équations du n° 315, elles deviennent les formules du sommet sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
V_s &= u_0 \qquad - \frac{c}{g} u_0 \xi(\alpha) \\
T_s &= \frac{u_0}{g} \operatorname{tg} \alpha + \frac{u_0}{g}\frac{c}{g}[\chi(\alpha) - \xi(\alpha) \operatorname{tg} \alpha] \\
X_s &= \frac{u_0^2}{g} \operatorname{tg} \alpha + \frac{2u_0^2}{g}\frac{c}{g}[\chi(\alpha) - \xi(\alpha) \operatorname{tg} \alpha] \\
Y_s &= \frac{u_0^2}{2g} \operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{2u_0^2}{g}\frac{c}{g}\left[\zeta(\alpha) - \frac{1}{2}\xi(\alpha) \operatorname{tg}^2 \alpha\right].
\end{aligned}$$

320. **Point de chute.** — Si dans la dernière des équations du n° 315, on fait $y = 0$, on devra remplacer τ par l'angle de chute ω et on obtiendra une relation entre α et ω, qui est la suivante.

$$0 = \operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \omega + 4\frac{c}{g}\left[\zeta(\alpha) - \zeta(\omega) - \frac{1}{2}\xi(\alpha)(\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \omega)\right]$$

Mais ω diffère infiniment peu de $-\alpha$ et est un peu plus grand ; posons donc $\omega = -(\alpha + \varepsilon)$, ε étant une très petite quantité à déterminer.

En se reportant à la définition des fonctions $\xi(\tau)$, $\chi(\tau)$, $\zeta(\tau)$, on voit immédiatement que $\xi(-\tau) = -\xi(\tau)$; $\chi(-\tau) = \chi(\tau)$; $\zeta(-\tau) = -\zeta(\tau)$. Donc ξ et ζ sont des fonctions impaires, comme $\operatorname{tg}\tau$; χ est une fonction paire, comme $\cos\tau$.

Dans la relation entre α et ω ci-dessus, on pourra remplacer, dans le terme où $\frac{c}{g}$ est facteur, ω par $-\alpha$, car on ne négligera ainsi, dans l'expression de $\operatorname{tg}\omega$, qu'un infiniment petit du deuxième ordre en $\frac{c}{g}$.

On aura ainsi :

$$\operatorname{tg}^2\omega = \operatorname{tg}^2\alpha + 4\frac{c}{g}[\zeta(\alpha) - \zeta(-\alpha)]$$

ou, d'après la parité de ζ,

$$\operatorname{tg}^2\omega = \operatorname{tg}^2\alpha + 8\frac{c}{g}\zeta(\alpha)$$

ou bien, en extrayant la racine

$$\operatorname{tg}\omega = -\left[\operatorname{tg}\alpha + 4\frac{c}{g}\frac{\zeta(\alpha)}{\operatorname{tg}\alpha}\right]$$

Si on porte la valeur ainsi trouvée en remplacement de $\operatorname{tg}\tau$ dans les formules du n° 315 et si on fait les réductions nécessaires, on a

$$T = \frac{u_0}{g}\left[2\operatorname{tg}\alpha + 4\frac{c}{g}\frac{\zeta(\alpha)}{\operatorname{tg}\alpha}\right] - 2\frac{u_0}{g}\frac{c}{g}\xi(\alpha)\operatorname{tg}\alpha$$

$$X = \frac{u_0^2}{g}\left[2\operatorname{tg}\alpha + 4\frac{c}{g}\frac{\zeta(\alpha)}{\operatorname{tg}\alpha}\right] - 4\frac{u_0^2}{g}\frac{c}{g}\xi(\alpha)\operatorname{tg}\alpha.$$

L'ensemble des formules du point de chute sera donc

$$u_\omega = u_0\left[1 - 2\frac{c}{g}\,\xi(\alpha)\right]$$

$$\operatorname{tg}\omega = -\operatorname{tg}\alpha\left[1 + 4\frac{c}{g}\,\zeta(\alpha)\operatorname{cotg}^2\alpha\right]$$

$$T = \frac{2u_0}{g}\operatorname{tg}\alpha\left[1 - \frac{c}{g}\left(\xi(\alpha) - 2\zeta(\alpha)\operatorname{cotg}^2\alpha\right)\right]$$

$$X = \frac{2u_0^2}{g}\operatorname{tg}\alpha\left[1 - 2\frac{c}{g}\left(\xi(\alpha) - \zeta(\alpha)\operatorname{cotg}^2\alpha\right)\right].$$

Les expressions des quantités correspondantes dans le vide ont été mises en facteur.

321. **Résumé**. — Les formules du *Tir courbe à faible vitesse*, bornées au terme en $\frac{c}{g}$, en posant :

$\mathcal{A}_1 = 2\xi(\alpha)$ $\qquad$ $\mathcal{D}_1 = 2\xi(\alpha) - 2\zeta(\alpha)\operatorname{cotg}^2\alpha$

$\mathcal{B}_1 = 4\zeta(\alpha)\operatorname{cotg}^2\alpha$ $\qquad$ $\mathcal{C}_1 = \xi(\alpha) - \chi(\alpha)\operatorname{cotg}\alpha$

$\mathcal{E}_1 = \xi(\alpha) - 2\zeta(\alpha)\operatorname{cotg}^2\alpha$

sont donc les suivantes,

Sommet.	*Point de chute.*
$V_s = u_0\left(1 - \frac{c}{2g}\mathcal{A}_1\right)$	$u_\omega = u_0\left(1 - \frac{c}{g}\mathcal{A}_1\right)$
$T_s = \frac{u_0}{g}\operatorname{tg}\alpha\left(1 - \frac{c}{g}\mathcal{C}_1\right)$	$T = \frac{2u_0}{g}\operatorname{tg}\alpha\left(1 - \frac{c}{g}\mathcal{E}_1\right)$
$X_s = \frac{u_0^2}{g}\operatorname{tg}\alpha\left(1 - 2\frac{c}{g}\mathcal{C}_1\right)$	$X = \frac{2u_0^2}{g}\operatorname{tg}\alpha\left(1 - \frac{c}{g}\mathcal{D}_1\right)$
$Y_s = \frac{u_0^2\operatorname{tg}^2\alpha}{g}\left(1 - 2\frac{c}{g}\mathcal{E}_1\right)$	$\operatorname{tg}\omega = -\operatorname{tg}\alpha\left(1 + \frac{c}{g}\mathcal{B}_1\right)$

Le problème sera résolu si on possède des tables des fonctions $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{B}_1$, etc., calculées avec la fonction $F(v)$ expérimentale.

322. **Formules différentielles du point de chute.** — On se propose de rechercher quelles sont les petites variations occasionnées aux éléments du point de chute par les petites variations ∂c, ∂V_0, $\partial\alpha$ des données à l'origine c, V_0 et α.

Soient X' et T' la portée et la durée du trajet dans le vide ; les équations du point de chute s'écriront :

$$u_\omega = u_0\left(1 - \frac{c}{g}\mathcal{A}_1\right); \qquad T = T'\left(1 - \frac{c}{g}\mathcal{C}_1\right);$$

$$\operatorname{tg}\omega = -\operatorname{tg}\alpha\left(1 + \frac{c}{g}\mathcal{B}_1\right); \quad X = X'\left(1 - \frac{c}{g}\mathcal{D}_1\right).$$

Si on différentie ces équations, on obtient les formules suivantes :

$$\frac{\partial u_\omega}{u_\omega} = \frac{\partial u_0}{u_0} - \frac{1}{g}\partial(c\mathcal{A}_1); \qquad \frac{\partial T}{T} = \frac{\partial T'}{T'} - \frac{1}{g}\partial(c\mathcal{C}_1);$$

$$\frac{\partial\omega}{\sin\omega\cos\omega} = \frac{\partial\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} + \frac{1}{g}\partial(c\mathcal{B}_1); \qquad \frac{\partial X}{X} = \frac{\partial X'}{X'} - \frac{1}{g}\partial(c\mathcal{D}_1).$$

Démontrons par exemple la dernière. Différentiant logarithmiquement, l'équation qui donne

$$X = X'\left(1 - \frac{c}{g}\mathcal{D}_1\right)$$

on aura

$$\frac{\partial X}{X} = \frac{\partial X'}{X'} - \frac{1}{g}\,\frac{\partial(c\mathcal{D}_1)}{1 - \frac{c}{g}\mathcal{D}_1} = \frac{\partial X'}{X'} - \frac{1}{g}\,\partial(c\mathcal{D}_1)\,\frac{X}{X'}$$

et comme $X = X'$ à un terme en $\frac{c}{g}$ près, la démonstration est établie.

1° *Variation* ∂c. — Les variations dues à ∂c étant nulles dans le vide, on aura immédiatement les formules :

$$\frac{\partial u_\omega}{u_\omega} = -\frac{1}{g}\mathcal{A}_1 \partial c \quad \text{ou} \quad \partial u_\omega = -(u_0 - u_\omega)\frac{\partial c}{c}$$

$$\frac{\partial \omega}{\cos^2 \omega} = \frac{1}{g}\mathcal{B}_1 \operatorname{tg}\alpha\, \partial c \qquad \frac{\partial \omega}{\cos^2 \omega} = -(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\omega)\frac{\partial c}{c}$$

$$\frac{\partial T}{T} = -\frac{1}{g}\mathcal{C}_1 \partial c \qquad \partial T = -(T' - T)\frac{\partial c}{c}$$

$$\frac{\partial X}{X} = -\frac{1}{g}\mathcal{D}_1 \partial c \qquad \partial X = -(X' - X)\frac{\partial c}{c}$$

2° *Différentiation des fonctions* $\xi(\tau)$ *et* $\zeta(\tau)$. — Pour obtenir les variations des autres éléments il faut calculer les dérivées telles que $\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial V_0}$, $\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial \alpha}$, etc. Mais les fonctions distinctes qui entrent dans les formules tant du point de chute que du sommet sont seulement $\xi(\tau)$, $\chi(\tau)$ et $\zeta(\tau)$ et il suffit de savoir former $\frac{\partial \xi(\alpha)}{\partial V_0}$, $\frac{\partial \xi(\alpha)}{\partial \alpha}$, etc.

a) On a : $\quad \xi(\alpha) = \int_0^\alpha F\left(\frac{u_0}{\cos\tau}\right)\frac{d\tau}{\cos\tau}.$

L'intégration sous le signe $\int$ donne immédiatement

$$\frac{\partial \xi(\alpha)}{du_0} = \int_0^\alpha F'\left(\frac{u_0}{\cos\tau}\right)\frac{d\tau}{\cos^2\tau}.$$

D'autre part :

$$\frac{\partial \xi(\alpha)}{\partial \alpha} = F\left(\frac{u_0}{\cos\alpha}\right)\frac{1}{\cos\alpha}.$$

b) On a : $$\chi(\alpha) = \int_0^{\alpha} \xi(\tau) \frac{d\tau}{\cos^2 \tau}.$$

Intégrant par parties, il viendra :

$$\chi(\alpha) = \xi(\alpha) \operatorname{tg} \alpha - \int_0^{\alpha} F\left(\frac{u_0}{\cos \tau}\right) \operatorname{tg} \tau \frac{d\tau}{\cos \tau}.$$

On aura alors :

$$\frac{\partial \chi(\alpha)}{\partial u_0} = \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial \xi(\alpha)}{\partial u_0} - \int_0^{\alpha} F'\left(\frac{u_0}{\cos \tau}\right) \operatorname{tg} \tau \frac{d\tau}{\cos^2 \tau},$$

et d'autre part :

$$\frac{\partial \chi(\alpha)}{\partial \alpha} = \xi(\alpha) \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$$

c) On a : $$\zeta(\alpha) = \int_0^{\alpha} \xi(\tau) \operatorname{tg} \tau \frac{d\tau}{\cos^2 \tau}.$$

Intégrant par parties, il vient :

$$\zeta(\alpha) = \frac{1}{2} \xi(\alpha) \operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{1}{2} \int_0^{\alpha} \operatorname{tg}^2 \tau \, F\left(\frac{u_0}{\cos \tau}\right) \frac{d\tau}{\cos \tau}.$$

On aura ainsi :

$$\frac{\partial \zeta(\alpha)}{\partial u_0} = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \alpha \frac{\partial \xi(\alpha)}{\partial u_0} - \frac{1}{2} \int_0^{\alpha} F'\left(\frac{u_0}{\cos \tau}\right) \operatorname{tg}^2 \tau \frac{d\tau}{\cos^2 \tau}.$$

Puis :

$$\frac{\partial \zeta(\alpha)}{\partial \alpha} = \xi(\alpha) \operatorname{tg} \alpha \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$$

323. **Variation ∂X.** — Nous calculerons seulement ici la variation ∂X.

On a d'après les formules du n° 318.

$$\frac{\partial X}{X} = \frac{\partial X'}{X'} - \frac{c}{g}\left(\frac{\partial \Theta_1}{\partial u_0}\partial u_0 + \frac{\partial \Theta_1}{\partial \alpha}\partial \alpha\right)$$

$$\text{avec } \Theta_1 = 2\xi(\alpha) - 2\zeta(\alpha)\,\text{cotg}^2\,\alpha.$$

D'après les valeurs trouvées pour

$$\frac{\partial \xi(\alpha)}{du_0} \quad \text{et} \quad \frac{d\zeta(\alpha)}{du_0},$$

on aura :

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial u_0} = \int_0^{\alpha} F'\left(\frac{u_0}{\cos \tau}\right)\frac{d\tau}{\cos^2 \tau} + \text{cotg}^2\,\alpha \int_0^{\alpha} F'\left(\frac{u_0}{\cos \tau}\right)\text{tg}^2\,\tau\,\frac{\cos^2 \tau}{d\tau} =$$

et d'après les valeurs trouvées pour

$$\frac{\partial \xi(\alpha)}{\partial \alpha} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \zeta(\alpha)}{\partial \alpha}$$

on a :

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial \alpha} = \frac{2}{\cos \alpha} F\left(\frac{u_0}{\cos \alpha}\right) - \frac{2\Theta_1}{\sin \alpha \cos \alpha}.$$

D'autre part, on a :

$$\partial u_0 = \cos \alpha\, \partial V_0 - V_0 \sin \alpha\, \partial \alpha.$$

1° *Variation* ∂V_0. — On aura :

$$\frac{\partial X}{X} = \frac{\partial X'}{X'} - \frac{c}{g}\,\theta_1(\alpha)\cos \alpha\, \partial V_0.$$

Mais comme $X' = \dfrac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}$,

il viendra

$$\frac{\partial X'}{X'} = \frac{2\partial V_0}{V_0} + \frac{2\partial\alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha}$$

et par suite

$$\frac{\partial X}{X} = \frac{2\partial V_0}{V_0} - \frac{c}{g}\,\theta_1(\alpha)\cos\alpha\,\partial V_0$$

2° *Variation* $\partial\alpha$. — On aura :

$$\frac{\partial X}{X} = \frac{\partial X'}{X'} + \frac{c}{g}\left[u_0\theta_1(\alpha)\operatorname{tg}\alpha - \frac{2}{\cos\alpha}\operatorname{F}\left(\frac{u_0}{\cos\alpha}\right) + \frac{2\mathfrak{S}_1}{\sin\alpha\cos\alpha}\right]\partial\alpha.$$

Posant :

$$\theta_2(\alpha) = -u_0\theta_1(\alpha)\operatorname{tg}\alpha + \frac{2}{\cos\alpha}\left[\operatorname{F}\left(\frac{u_0}{\cos\alpha}\right) - \frac{\mathfrak{S}_1}{\sin\alpha}\right]$$

il viendra :

$$\frac{\partial X}{X} = 2\,\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\partial\alpha} - \frac{c}{g}\,\theta_2(\alpha)\partial\alpha.$$

324. **Première application**. — *Variation* ∂V_0 *dans le cas de* $F(v) = B_n v^n$. — Lorsqu'on fait $F(v) = B_n v^n$, la formule (318) qui donne la portée X, devient, en tenant compte des relations du n° 316 :

$$X = X'\left[1 - \frac{2c}{g}B_n u_0^n\left[\xi_n(\alpha) - \zeta_n(\alpha)\operatorname{cotg}^2\alpha\right]\right] = X'\left[1 - \lambda V_0^n\right]$$

λ étant une fonction de α seulement et non de V_0.

On aura donc

$$\frac{\partial X}{X} = \frac{\partial X'}{X'} - \frac{n\lambda V_0^{n-1}}{1 - \lambda V_0^n}\,\partial V_0.$$

Remplaçant

$$\frac{\partial X'}{X'} \text{ par } \frac{2\partial V_0}{V_0} \qquad \text{et} \qquad \lambda \text{ par } \frac{X' - X}{X' V_0^n}$$

il viendra

$$\frac{\partial X}{X} = \left(2 - n + n\frac{X}{X'}\right)\frac{\partial V_0}{V_0}.$$

Exercice. — Démontrer directement que la fonction $\theta_1(\alpha)$ est égale à $-\dfrac{n\lambda V_0^{n-1}}{1-\lambda V_0^n}$.

325. **Deuxième application.** — *Angle de portée maximum* (cas de $F(v) = B_n v^n$). — L'équation du numéro précédent qui donne la portée X s'écrira en mettant α en évidence

$$X = V_0^2 \frac{\sin 2\alpha}{g}\left[1 - \frac{2c}{g} B_n u_0^n \left[\xi_n(\alpha) - \zeta_n(\alpha)\operatorname{cotg}^2\alpha\right]\right].$$

Le maximum de portée correspond à la condition $\dfrac{\partial X}{\partial \alpha} = 0$, ce qui en posant

$$\rho = \frac{c}{g} B_n u_0^n.$$

conduit à l'équation suivante :

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha\left[1 - 2\rho\left(\xi_n(\alpha) - \zeta_n(\alpha)\operatorname{cotg}^2\alpha\right)\right]&\\ - \rho\sin 2\alpha\left[\frac{\partial\xi_n(\alpha)}{\partial\alpha} - \frac{\partial(\zeta_n(\alpha)\operatorname{cotg}^2\alpha)}{\partial\alpha}\right]&\\ - \sin 2\alpha\frac{\partial\rho}{\partial\alpha}\left[\xi_n(\alpha) - \zeta_n(\alpha)\operatorname{cotg}^2\alpha\right] &= 0.\end{aligned}$$

L'angle de portée maximum cherché est très voisin de $\dfrac{\pi}{2}$. Posons alors $\alpha = \dfrac{\pi}{4} + \varepsilon$ et proposons-nous de déterminer ε.

On a d'abord $\quad \cos 2\left(\dfrac{\pi}{4} + \varepsilon\right) = -2\varepsilon.$

Dans la première parenthèse, le terme en ρ disparaît comme devant être multiplié par ε et par suite devenant du second ordre.

Dans les deux autres termes où ρ ou $\frac{\partial \rho}{\partial \alpha}$ est facteur, on pourra remplacer simplement α par $\frac{\pi}{4}$.

Comme d'ailleurs $\frac{\partial \rho}{\partial \alpha} = -n\rho \operatorname{tg} \alpha$, on aura l'équation de condition suivante :

$$2\varepsilon = \rho \left[\left(\frac{\partial \xi_n(\alpha)}{\partial \alpha}\right)_{\frac{\pi}{4}} - \left(\frac{\partial \zeta_n(\alpha) \operatorname{cotg}^2 \alpha}{\partial \alpha}\right)_{\frac{\pi}{4}} - n\left(\xi_n\left(\frac{\pi}{4}\right) - \zeta_n\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \right]$$

Or, on peut exprimer $\zeta_n(\tau)$ en fonction de $\xi_n(\tau)$ et de $\xi_{n+2}(\tau)$ (316), puis $\xi_{n+2}(\tau)$ en fonction de $\xi_n(\tau)$ (159).

D'autre part

$$\frac{d\xi_n(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{\cos^{n+1}\tau}; \qquad \frac{d\zeta_n(\tau)}{d\tau} = \frac{\xi_n(\tau)\operatorname{tg}\tau}{\cos\tau}.$$

On a donc tous les éléments pour faire le calcul ci-dessus qui conduit à la formule,

$$\varepsilon = \frac{1}{n+2} \frac{cB_n V_0^n}{g} \frac{1}{2^{\frac{4+n}{2}}} \left[(n^2+n-4)\, \xi_n\left(\frac{\pi}{4}\right) - n 2^{\frac{n+1}{2}} \right]$$

Au moyen des tables de la fonction ξ_n, pour diverses valeurs de n, on peut dresser le tableau suivant qui donne la valeur de l'expression

$$2^{\frac{4+n}{2}} \frac{g}{cB_n V_0^n} \varepsilon \qquad \text{ou} \qquad \frac{4\varepsilon}{\rho}.$$

n —	— 2	— 1	0	1	2	3	4	5
$\frac{4\varepsilon}{\rho}$ =	—2,480	—2,140	—1,762	1—,333	—0,841	—0,267	+0,415	+0,950

Ainsi qu'on le voit, ε s'annule pour une valeur de n comprise entre 3 et 4. Au-dessus de cette valeur de n, l'angle de

portée maximum est plus grand que 45° ; au-dessous, au contraire, cet angle est plus petit que 45°.

Cette conclusion, établie pour le cas d'une résistance infiniment petite, est valable même pour une résistance finie, à condition que la série dont on étudie le premier terme soit convergente, c'est-à-dire que le rapport $\frac{cF}{g}$ soit plus petit que l'unité.

326. **Point de vitesse minimum**. — On a (315) :

$$v\cos\tau = u_0 - \frac{c}{g}u_0[\xi(\alpha)-\xi(\tau)] = V_s + \frac{c}{g}V_s\xi(\tau).$$

donc

$$\cos\tau\frac{dv}{d\tau} - v\sin\tau = \frac{c}{g}V_s\frac{d\xi(\tau)}{d\tau}.$$

Or (314)

$$d\xi(\tau) = F\left(\frac{u_0}{\cos\tau}\right)\frac{d\tau}{\cos\tau}.$$

Faisant $\frac{dv}{d\tau} = 0$, et remarquant que τ est très voisin de o (à un terme en $\frac{c}{g}$ près), on écrira

$$\sin\tau_m = -\frac{c}{g}F(u_0)$$

qui fait connaître l'angle τ_m de vitesse minimum.

Comme le développement de $\xi(\tau)$ en série donne pour le premier terme

$$\xi(\tau) = \tau F(u_0) \qquad \text{ou} \qquad \sin\tau F(u_0)$$

il viendra, pour la vitesse minimum v_m, l'expression

$$v_m = V_s\left[1 - \frac{c^2}{g^2}F^2(u_0)\right] = V_s\cos^2\tau_m.$$

v_m ne diffère donc de V_s que d'une quantité infiniment petite du second ordre.

§ 3. — Second terme de la série

327. **Intégration de l'hodographe.** — Nous nous proposons, dans ce paragraphe, de poursuivre la solution du problème jusqu'aux termes en $\frac{c^2}{g^2}$ inclusivement.

En y conservant ce terme, l'équation différentielle de l'hodographe a été mise sous la forme (313)

$$du = \frac{c}{g} u_0 F\left(\frac{u_0}{\cos\tau}\right) \frac{d\tau}{\cos\tau} - \frac{c}{g}(u_0 - u)\mathcal{F}\left(\frac{u_0}{\cos\tau}\right)\frac{d\tau}{\cos\tau}$$

où

$$\mathcal{F}\left(\frac{u_0}{\cos\tau}\right) = F + \frac{u_0}{\cos\tau} F'.$$

En négligeant le 2[e] terme du second membre, nous avons intégré l'hodographe sous la forme

$$u = u_0 - \frac{c}{g} u_0 \left[\xi(\alpha) - \xi(\tau)\right]$$

Remplaçant alors dans le terme négligé $u_0 - u$ par sa valeur principale, on aura, en intégrant :

$$u = u_0 - \frac{c}{g} u_0 [\xi(\alpha) - \xi(\tau)] - \frac{c^2}{g^2} u_0 \int_\alpha^\tau [\xi(\alpha) - \xi(\tau)] \mathcal{F}\left(\frac{u_0}{\cos\tau}\right) \frac{\cos\tau}{d\tau}.$$

Posons comme définition de deux nouvelles intégrales

$$\xi^{\text{I}}(\tau) = \int_0^\tau \mathcal{F}\left(\frac{u_0}{\cos\tau}\right) d\tau$$

$$\xi^{\text{II}}(\tau) = \int_0^\tau \xi(\tau) \mathcal{F}\left(\frac{u_0}{\cos\tau}\right) \frac{d\tau}{\cos\tau}$$

Convenons de plus pour la simplicité de l'écriture :

1° De désigner par une notation entre crochets $[u]$, $[t]$, $[x]$, les éléments calculés avec le terme en $\frac{c^2}{g^2}$, les notations u, t, x désignent ces mêmes éléments quand on ne conserve que le terme en $\frac{c}{g}$.

3° D'écrire ξ, $\xi^{\prime}$, $\xi^{\prime\prime}$..., au lieu de $\xi(\tau)$, $\xi^{\prime}(\tau)$, $\xi^{\prime\prime}(\tau)$..., et $\xi\alpha$, $\xi^{\prime}\alpha$, $\xi^{\prime\prime}\alpha$... au lieu de $\xi(\alpha)$, $\xi^{\prime}(\alpha)$, $\xi^{\prime\prime}(\alpha)$...

On aura alors pour la vitesse horizontale $[u]$ avec ces notations :

$$[u] = u + \frac{c^2}{g^2} u_0 [\xi^{\prime\prime} - \xi^{\prime}\xi\alpha - \xi^{\prime\prime}\alpha + \xi^{\prime}\alpha\xi\alpha].$$

328. **Temps.** — Portant cette valeur de $[u]$ dans l'équation $[t] = -\frac{1}{g}\int_\alpha^\tau u \frac{d\tau}{\cos^2\tau}$ il viendra :

$$[t] = t - \frac{1}{g}\frac{c^2}{g^2} u_0 \left[\int_\alpha^\tau \xi^{\prime\prime} \frac{d\tau}{\cos^2\tau} - \xi\alpha\int_0^\tau \xi^{\prime} \frac{d\tau}{\cos^2\tau} - (\xi^{\prime\prime}\alpha - \xi^{\prime}\alpha\xi\alpha)(\operatorname{tg}\tau - \operatorname{tg}\alpha)\right].$$

Posons, comme définitions de deux nouvelles fonctions :

$$\chi^{\prime}(\tau) = \int_0^\tau \xi^{\prime} \frac{d\tau}{\cos^2\tau}$$

$$\chi^{\prime\prime}(\tau) = \int_0^\tau \xi^{\prime\prime} \frac{d\tau}{\cos^2\tau}.$$

Il viendra :

$$[t] = t - \frac{1}{g}\frac{c^2}{g^2} u_0 [\chi^{\prime\prime} - \chi^{\prime}\xi\alpha - \operatorname{tg}\tau(\xi^{\prime\prime}\alpha - \xi^{\prime}\alpha\xi\alpha) - \chi^{\prime\prime}\alpha + \chi^{\prime}\alpha\xi\alpha + \operatorname{tg}\alpha(\xi^{\prime\prime}\alpha - \xi^{\prime}\alpha\xi\alpha)].$$

329. **Abscisse.** — Remarquons que si on élève $[u]$ au carré, il s'introduit dans u^2, un terme en $\frac{c^2}{g^2}$ qui est $\frac{c^2}{g^2}\, u_0^2(\xi_\alpha - \xi)^2$ et qui avait été négligé au § I (315). On doit le faire entrer maintenant dans le terme en c^2 et écrire :

$$[u]^2 = u^2 + \frac{c^2}{g^2}\, u_0^2 [2\xi^{\text{II}} + \xi^2 - 2(\xi + \xi^{\text{I}})\xi\alpha - 2\xi^{\text{II}}\alpha - \xi^2\alpha + 2\xi^{\text{I}}\alpha\xi\alpha].$$

Portant dans l'équation

$$[x] = -\frac{1}{g}\int_\alpha^\tau u^2 \frac{d\tau}{\cos^2\tau}$$

on aura :

$$[x] = x - \frac{1}{g}\frac{c^2}{g^2}\, u_0^2 [\chi^{\text{IV}} - 2\chi^{\text{III}}\xi\alpha - \operatorname{tg}\tau(2\xi^{\text{II}}\alpha - 2\xi\alpha\xi^{\text{I}}\alpha - \xi^3\alpha)$$
$$- \chi^{\text{IV}}\alpha + 2\chi^{\text{III}}\alpha\xi\alpha + \operatorname{tg}\alpha(2\xi^{\text{I}}\alpha - 2\xi\alpha\xi^{\text{I}}\alpha - \xi^2\alpha)]$$

en posant :

$$\chi^{\text{III}}(\tau) = \int_0^\tau (\xi + \xi^{\text{I}}) \frac{d\tau}{\cos^2\tau};$$

$$\chi^{\text{IV}}(\tau) = \int_0^\tau (2\xi^{\text{II}} + \xi^2) \frac{d\tau}{\cos^2\tau}.$$

330. **Ordonnée.** — La même valeur de $[u]^2$ portée dans l'équation

$$dy = -\frac{u^2}{g}\operatorname{tg}\tau \frac{d\tau}{\cos^2\tau}$$

donnera :

$$[y] = y - \frac{1}{g}\frac{c^2}{g^2} u_0 \Big[\zeta^{\text{II}} - 2\zeta^{\text{I}}\xi\alpha - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\tau(2\xi^{\text{II}}\alpha - 2\xi^{\text{I}}\alpha\xi\alpha - \xi^2\alpha)$$
$$- \zeta^{\text{II}}\alpha + 2\zeta^{\text{I}}\alpha\xi\alpha + \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\alpha(2\xi^{\text{II}}\alpha - 2\xi^{\text{I}}\alpha\xi\alpha - \xi^2\alpha)\Big]$$

en posant :

$$\zeta^{I}(\tau) = \int_0^\tau (\xi^{I} + \xi)\,\mathrm{tg}\,\tau \frac{d\tau}{\cos^2\tau};$$

$$\zeta^{II}(\tau) = \int_0^\tau (2\xi^{II} + \xi^2)\,\mathrm{tg}\,\tau \frac{d\tau}{\cos^2\tau}.$$

331. **Point de chute. Angle de chute.** — D'après leur définition :

les fonctions χ, ξ^{II}, χ^{I}, χ^{III}, ζ^{II} sont paires ;
les fonctions ξ, ζ, ξ^{I}, ζ^{I}, χ^{II} et χ^{IV} sont impaires.

1° Pour avoir le point de chute, on fera $[y] = 0$. Mais, dans le terme en $\frac{c^2}{g^2}$, on devra remplacer simplement τ par $-\alpha$; d'après la parité des fonctions, il reste donc :

$$0 = y - \frac{4}{g}\frac{c^2}{g^2} u_0^2 \xi\alpha\zeta^{I}\alpha.$$

En se reportant aux équations du n° 315 on aura :

$$y = \frac{u_0^2}{2g}(\mathrm{tg}^2\alpha - \mathrm{tg}^2\omega) + \frac{2u_0^2}{g}\frac{c}{g}\left[\zeta\alpha - \zeta\omega - \frac{1}{2}\xi\alpha(\mathrm{tg}^2\alpha - \mathrm{tg}^2\omega)\right]$$

2° Mais, dans le second terme du deuxième membre qui est multiplié par $\frac{c}{g}$, on pourra remplacer $\mathrm{tg}\,\omega$ par $-\left[\mathrm{tg}\,\alpha + \frac{4c}{g}\frac{\zeta\alpha}{\mathrm{tg}\,\alpha}\right]$ valeur trouvée au n° 317.

D'autre part on a :

$$\zeta_\omega = -\zeta(\alpha + \varepsilon) = -\zeta\alpha - \varepsilon\frac{d\zeta}{d\alpha}.$$

Mais

$$\frac{d\zeta}{d\alpha} = \frac{\xi\alpha \operatorname{tg} \alpha}{\cos^2 \alpha}$$

et

$$\varepsilon = -(\alpha + \omega) = -(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\omega)\cos^2\alpha = 4\,\frac{c}{g}\,\frac{\zeta\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}\cos^2\alpha.$$

On a ainsi :

$$\zeta_\omega = -\zeta\alpha - 4\,\frac{c}{g}\,\xi\alpha\zeta\alpha.$$

3° L'angle de chute sera alors donné par la formule

$$\operatorname{tg}^2\omega = \operatorname{tg}^2\alpha + \frac{8c}{g}\,\zeta\alpha + \frac{8c^2}{g^2}\,\xi\alpha\,[4\zeta\alpha - \zeta'\alpha].$$

332. **Autres éléments**. — La même méthode appliquée aux équations des autres éléments donnera les formules suivantes :

$$[u_\omega] = u_0 - 2\frac{c}{g}u_0\xi\alpha - 2\,\frac{c^2}{g^2}\,u_0\left[2\zeta\alpha\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}\,F(V_0) - \xi\alpha\zeta'\alpha\right]$$

$$[T] = T + \frac{2}{g}\frac{c^2}{g^2}u_0\left[\chi''\alpha + (\xi\alpha\xi'\alpha - \xi''\alpha)\operatorname{tg}\alpha - 4\xi\alpha\zeta\alpha\operatorname{cotg}\alpha \right.$$
$$\left. + 2\operatorname{cotg}\alpha\left[\xi\alpha(4\zeta\alpha - \zeta'\alpha) - 2\,\frac{\xi^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha}\right]\right]$$

$$[X] = X + \frac{4}{g}\,\frac{c^2}{g^2}\,u_0^2\left[(2\xi\alpha\xi'\alpha - 2\xi''\alpha + \xi^2\alpha)\operatorname{tg}\alpha - 2\xi\alpha\chi'''\alpha \right.$$
$$\left. - 4\xi\alpha\zeta\alpha\operatorname{cotg}\alpha + 2\operatorname{cotg}\alpha\left[\xi\alpha(4\zeta\alpha - \zeta'\alpha) - \frac{2\xi^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha}\right]\right]$$

$$[\operatorname{tg}^2\omega] = \operatorname{tg}^2\alpha + 8\frac{c}{g}\zeta\alpha + 8\frac{c^2}{g^2}\xi\alpha\,[4\zeta\alpha - \zeta'\alpha]$$

333. **Résumé**. — Les formules du second terme pour le point de chute introduisent huit nouvelles fonctions de l'angle de projection et de la vitesse initiale horizontale ; en mettant en facteur le terme correspondant du vide elles se mettent sous la forme :

$$u_\omega = u_0 \left[1 - \frac{c}{g} \mathcal{A}_1 + \frac{c^2}{g^2} \mathcal{A}_2 \ldots \right]$$
$$\operatorname{tg} \omega = \operatorname{tg} \alpha \left[1 + \frac{c}{g} \mathcal{B}_1 - \frac{c^2}{g^2} \mathcal{B}_2 \ldots \right]$$

. . . .

Les fonctions $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{B}_1 \ldots \mathcal{A}_2$, $\mathcal{B}_2 \ldots$ peuvent être réduites en tables numériques à double entrée $(u_0\ \alpha)$ calculées avec la fonction $F(v)$ expérimentale.

334. **Exercice**. — Dans les cas de $F(v) = B_n v^n$, démontrer qu'on a :

$$\xi^{I} = (n+1)\xi ; \qquad \chi^{I} = (n+1)\chi ;$$
$$\xi^{II} = \frac{n+1}{2} \xi^2 ; \qquad \chi^{II} = \frac{n+1}{2} \int_0^{\tau} \xi^2 \frac{d\tau}{\cos^2\tau} ;$$
$$\zeta^{I} = (n+2)\zeta ; \qquad \chi^{III} = (n+2)\chi$$
$$\zeta^{II} = (n+2) \int_0^{\tau} \xi^2 \operatorname{tg}\tau \frac{d\tau}{\cos^2\tau} ; \qquad \chi^{IV} = (n+2)\chi^{II}.$$

§ 4. — Quelques problèmes relatifs au tir courbe à faible vitesse

335. **Application de l'équation du colonel Jacob**. — Cherchons à quelles formules conduit l'équation différentielle entre y et v (93) :

$$gv^3 y''_v + g^3 y'^3_v \left[\left(\frac{g}{cF} \right)^2 - 1 \right]$$
$$+ gv \left[3 \left(\frac{g}{cF} \right)^2 + \frac{vF'}{F} - 1 \right] gy'^2_v + vy'_v + \left(\frac{g}{cF} \right)^2 v^3 = 0.$$

quand on cherche à la développer non plus, comme au chapitre précédent, suivant les puissances de $\frac{g}{c}$, mais suivant les puissances de $\frac{c}{g}$.

Posons donc :

$$gy = Z_0 + \frac{c}{g} Z_1 + \left(\frac{c}{g}\right)^2 Z_2 + \ldots\ldots + \left(\frac{c}{g}\right)^n Z_n.$$

$Z_0, Z_1 \ldots Z_n$ sont des fonctions inconnues de v qu'il s'agit de déterminer; leurs dérivées sont $Z'_0, Z''_0, Z'_1, Z''_1 \ldots$

La même méthode de substitution qu'au n° 308 sera appliquée.

On a $Z'_0 = -v$. En effet, l'équation qui donne $gy'_v = -\dfrac{v \sin \tau}{\dfrac{cF}{g} + \sin \tau}$ montre que, si on suppose $\frac{cF}{g}$ très petit et négligeable devant $\sin \tau$, on a $gy'_v = -v$. On posera donc :

$$gy'_v = -v + \frac{c}{g} Z'_1 + \left(\frac{c}{g}\right)^2 Z'_2 \ldots\ldots + \left(\frac{c}{g}\right)^n Z'_n.$$

On formera gy''_v, on portera ces valeurs dans l'équation différentielle en y''_v et y'_v, puis on égalera à zéro les coefficients de $\frac{c}{g}, \left(\frac{c}{g}\right)^2 \ldots \left(\frac{c}{g}\right)^n$.

En ordonnant tout d'abord par rapport au coefficient $\frac{c}{g}$ l'équation différentielle entre y et v, on a :

$$(gy'_v + v)^3 + \left(\frac{c}{g}\right)^2 F^2 \left[gv^3 y''_v - g^2 y''^3_v + gv\left(\frac{vF'}{F} - 1\right) g y'^2_v + gv^2\left(\frac{vF'}{F} - 1\right) y'_v\right] = 0.$$

Remplaçant alors

$$(gy'_v + v)^3 \text{ par } \frac{c^3}{g^3}\left[Z'^3_1 + 3\frac{c}{g} Z'^2_1 Z'_2\right]$$

$$gy''_v \text{ par } -1 + \frac{c}{g} Z''_1 + \left(\frac{c}{g}\right)^2 Z''_2$$

$$g^3y'^3_v \text{ par } -v^3 + 3\frac{c}{g} v^2Z'_1 - 3\left(\frac{c}{g}\right)^2 vZ'^2_1 + 3\left(\frac{c}{g}\right)^2 v^2Z'_2$$

$$g^2y'^2_v \text{ par } +v^2 - 2\frac{c}{g} vZ'_1 + \left(\frac{c}{g}\right)^2 Z'^2_1 - 2\left(\frac{c}{g}\right)^2 vZ'_2$$

$$gy'_v \text{ par } -v + \frac{c}{g} Z'_1 + \left(\frac{c}{g}\right)^2 Z'_2$$

et égalant à zéro les coefficients des mêmes puissances de $\frac{c}{g}$, il viendra :

$$v^3Z''_1 + \frac{Z'^3_1}{F^2} - \left(2 + \frac{vF'}{F}\right)v^2Z'_1 = 0$$

$$v^3Z''_2 + Z'_2\left[3\frac{Z'^2_1}{F^2} - v^2\left(\frac{vF'}{F} - 2\right)\right] + \frac{v^2F'}{F} Z'^2_1 = 0.$$

La première équation est une équation de Bernoulli. Les suivantes sont linéaires, Z'^2_1 étant remplacé par sa valeur tirée de la première supposée résolue.

Intégration de l'équation en Z_1. — Pour résoudre l'équation

$$v^3Z''_1 + \frac{Z'^3_1}{F^2} - \left(2 - \frac{vF'}{F}\right)v^2Z'_1 = 0$$

prenons pour inconnue la quantité ζ telle que

$$Z'_1 = v\zeta^{-\frac{1}{2}}$$

d'où

$$Z''_1 = \zeta^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} v\zeta^{-\frac{2}{3}}\zeta'.$$

Portant cette valeur dans l'équation, il vient :

$$\frac{\zeta'}{\zeta} + \frac{2}{v} + \frac{2F'}{F} = \frac{2}{vF^2}$$

L'intégrale de l'équation sans second membre est :

$$\operatorname{Log} \zeta\, v^2F^2 = \text{const.}$$

ou

$$\zeta = \frac{C}{v^2F^2}.$$

Pour déterminer la constante C, on écrira :

$$\frac{dC}{dv}\,\frac{1}{v^2F^2} = \frac{2}{vF^2}$$

d'où

$$C = v^2 + C_1.$$

On a donc :

$$\zeta = \frac{v^2 + C_1}{v^2F^2} \qquad \text{et} \qquad Z_1'^2 = \frac{v^4F^2}{v^2 + C_1}.$$

Pour déterminer la constante C_1, on part de l'équation :

$$gy'_v = -\frac{v \sin \tau}{\dfrac{cF}{g} + \sin \tau} = -v\left[1 + \frac{cF}{g \sin \tau}\right]^{-1}$$

et en développant par la formule du binôme, il vient :

$$gy'_v = -v - \frac{cFv}{g \sin \tau} + \cdots$$

On a donc :

$$Z_1' = -\frac{vF}{\sin \tau}$$

et par suite, à l'origine : $(Z_1')_0 = -\dfrac{V_0F_0}{\sin \alpha}$.

On aura donc :

$$V_0^2 + C_1 = V_0^4F_0^2\,\frac{\sin^2\alpha}{V_0^2F_0^2} = V_0^2 \sin^2\alpha$$

d'où

$$C_1 = -V_0^2 \cos^2 \alpha = -u_0^2.$$

Il en résulte que

$$Z_1' = \frac{v^2 F}{(v^2 - u_0^2)^{\frac{1}{2}}}$$

et

$$Z_1 = \int_{V_0}^{v} \frac{v^2 F dv}{(v^2 - u_0^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Ainsi donc, on aura :

$$gy = \frac{1}{2}(V_0^2 - v^2) + \frac{c}{g}\int_{V_0}^{v} \frac{v^2 F dv}{(v^2 - u_0^2)^{\frac{1}{2}}} + \left(\frac{c}{g}\right)^2 \int_{V_0}^{v} \varphi(v, u_0)\, dv + \ldots$$

La série qui exprime y en fonction de v, introduit donc des *fonctions balistiques* nouvelles ; mais de même que par la méthode suivie précédemment (315) s'introduisaient des fonctions de τ et de u_0, de même les fonctions balistiques introduites par la méthode du colonel Jacob renferment outre la variable v, la constante u_0.

Des tables à double entrée seraient donc également nécessaires pour résoudre le problème balistique dans le cas du tir courbe à faible vitesse.

On peut d'ailleurs passer des formules ci-dessus du colonel Jacob à celles qui ont été établies précédemment (315).

Exercices. — Nous ne poursuivrons pas plus loin le développement de cette intéressante méthode ; nous donnerons seulement à titre d'exercices les résultats principaux obtenus par le colonel Jacob.

1° Pour déterminer le second terme, on a l'équation privée de second membre

$$Z_2'' + \frac{Z_2'}{v}\left[\frac{3v^2}{v^2 - u_0^2} - \frac{vF'}{F} + 2\right] = 0$$

qui se résout par la formule

$$Z_2' = \frac{C_2}{(v^2 - u_0^2)^{\frac{1}{2}} F}$$

C_2 sera déterminé par la méthode de la variation des constantes ; on écrira :

$$\frac{dC_2}{dv}\frac{1}{(v^2-u_0^2)^{\frac{3}{2}}F}=\frac{v^3F'}{v^2-u_0^2}$$

ou
$$C_2=\int_{V_0}^{v}(v^2-u_0^2)^{\frac{1}{2}}\ v^3\ FF'\,dv,$$

2° x'_v désignant $\frac{dx}{dv}$ et $y'_v=\frac{dy}{dv}$, démontrer la formule

$$\left(\frac{c}{g}\right)^2 x^2\left[g^2x_v'^2+g^2y_v'^2\right]=(v+gy'_v)^2.$$

Posant :

$$gx'_v=X'_0+\frac{c}{g}X_1+\left(\frac{c}{g}\right)^2X'_2.$$

démontrer que

$$X'_0=\frac{vV_0\sin\alpha}{(v^2-v_0^2\sin^2\alpha)^{\frac{1}{2}}}$$

$$X'_1=\frac{Z_1Z_1'^2+Z'_1Z'_2}{F^2}+vZ'_1$$

3° On a :

$$gt'_v=-\frac{v+gy'_v}{\frac{c}{g}vF}$$

et par suite :

$$cvFt'_v=\frac{c}{g}Z'_1+\left(\frac{c}{g}\right)^2Z'_2+\ldots$$

4° Si on fait $u_0=0$, on se trouve dans le cas du mouvement vertical ascendant ou descendant. On retombe sur le développement en série indiqué au n° 82.

5° Montrer que pour $F(v)=B_nv^n$, la fonction $\int_{V_0}^{v}\frac{v^2Fdv}{(v^2-u_0^2)^{\frac{1}{2}}}$

est intégrable si n est un nombre entier et qu'elle ne dépend plus que du rapport $\frac{v}{u_0}\cdot$

333. **Méthode de Siacci**. — Dans le problème dit des facteurs β de Siacci (289), nous avons dit que cet auteur avait considéré la série développée suivant les puissances ascendantes du coefficient balistique, c'est-à-dire la série du *tir courbe à faible vitesse*. Voici comment il conduit les calculs :

L'hodographe $$d(v \cos \tau) = \frac{c}{g} vF(v) d\tau$$

sera d'abord écrit identiquement

$$d(v \cos \tau)^2 = 2 \frac{c}{g} v^2F(v) \cos \tau \, d\tau = \frac{c}{g} \Phi(v) \cos \tau \, d\tau.$$

Soit posé $v^2 = \psi(\tau)$ c'est-à-dire v exprimé en fonction de τ.

Si nous supposons que $\psi(\tau)$ est développée en série de Mac-Laurin suivant les puissances ascendantes de $\frac{c}{g}$, on aura :

$$v^2 = \psi_0(\tau) + \frac{c}{g}\left(\frac{d\psi}{dc}\right)_0 + \frac{c^2}{g^2}\frac{1}{1.2}\left(\frac{d^2\psi}{dc^2}\right)_0 + \frac{c^3}{g^3}\frac{1}{1.2.3}\left(\frac{d^3\psi}{dc^3}\right)_0 + \cdots$$

On aura donc :

$$d\cos^2\tau\left[\psi_0(\tau) + \frac{c}{g}\left(\frac{d\psi}{dc}\right)_0 + \frac{c^2}{g^2}\frac{1}{1.2}\left(\frac{d^2\psi}{dc^2}\right)_0 + \frac{c^3}{g^3}\frac{1}{1.2.3}\left(\frac{v^3\psi}{dc^3}\right)_0 + \cdots\right]$$
$$= \frac{c}{g}\left[\Phi_0(v) + \frac{c}{g}\left(\frac{d\Phi}{dc}\right)_0 + \frac{c^2}{g^2}\frac{1}{1.2}\left(\frac{d^2\Phi}{dc^2}\right)_0 + \cdots\right]\cos\tau \, d\tau.$$

En identifiant les termes qui multiplient les mêmes puissances de $\frac{c}{g}$, on a

$$d \cos^2 \tau \, \psi_0(\tau) = 0$$
$$d \cos^2 \tau \left(\frac{d\psi}{dc}\right)_0 = \Phi_0 \cos \tau \, d\tau.$$

$$d \cos^2 \tau \left(\frac{d^2\psi}{dc}\right)_0 = 2 \left(\frac{d\Phi}{dc}\right)_0 \cos\tau\, d\tau$$

$$d \cos^2 \tau \left(\frac{d^3\psi}{dc}\right)_0 = 3 \left(\frac{d^2\Phi}{d\tau}\right)_0 \cos\tau\, d\tau.$$

. . . .

La première équation donne :

$$\cos^2 \tau\, \psi_0(\tau) = \text{const.}$$

c'est-à-dire

$$v^2 \cos^2 \tau = V_0^2 \cos^2 \alpha.$$

La deuxième donne

$$\cos^2 \tau \left(\frac{d\psi}{dc}\right)_0 = \int_\alpha^\tau \Phi_0(v) \cos\tau\, d\tau$$

et comme

$$\Phi_0(v) = [2v^2 F(v)]_0 = 2 \frac{u_0^2}{\cos^2\tau} F\left(\frac{u_0}{\cos\tau}\right)$$

on trouve

$$\left(\frac{d\psi}{dc}\right)_0 = \frac{2u_0^2}{\cos^2\tau}\int_\alpha^\tau F\left(\frac{u_0}{\cos\tau}\right)\frac{d\tau}{\cos\tau}$$

c'est-à-dire en se reportant aux notations du n° 314.

$$\left(\frac{d\psi}{dc}\right)_0 = \frac{2u_0^2}{\cos^2\tau}[\xi(\tau) - \xi(\alpha)]$$

Les deux premiers termes de $v^2 = \psi(\tau)$ seront donc

$$u^2 = u_0^2 + 2\frac{c}{g}u_0^2[\xi(\tau) - \xi(\alpha)].$$

ce qui est bien l'équation du n° 314.

Exercices. — 1° Trouver le terme en $\dfrac{c^2}{g^2}$

2° Trouver par cette même méthode les développements de t, x et y.

334. **Exercices sur l'angle de portée maximum**. — 1° Le calcul numérique montre que la valeur pour laquelle ε s'annule (322) est très voisine de 3,4142... soit $2+\sqrt{2}$. Elle est probablement égale à ce nombre sans qu'il en ait été donné encore de démonstration rigoureuse.

2° *Démontrer que ε ne devient jamais négatif pour des valeurs de n supérieures à $2+\sqrt{2}$.* On pose

$$K_n = (n^2+n-4)\xi_n - n2^{\frac{n+1}{2}}$$

et on démontre que $K^{n+2} - K_n$ est positif pour des valeurs de $n>4$. D'autre part, entre $2+\sqrt{2}$ et $4+\sqrt{2}$, on démontre le même théorème en dérivant K_n par rapport à n. On a

$$K'_n = (2n+1)\xi_n + (n^2+n-4)\,\xi'_n - (1+n\operatorname{Log} 2)\sqrt{2^{n+1}}$$

et

$$\frac{d\xi_n}{dn} = \frac{d}{dn}\int \frac{d\tau}{\cos^{n+1}} = -\int \frac{d\tau}{\cos^{n+1}\tau}\operatorname{Log}\cos\tau$$

$$= -\,\xi_n(\tau)\operatorname{Log}\cos\tau - \int \xi_n(\tau)\operatorname{tg}\tau\, d\tau$$

(Siacci).

3° *Théorèmes du colonel Astier.* — Les propriétés établies dans ce chapitre sur l'angle de portée maximum dans le cas d'une résistance infiniment petite de la forme $F(v)=B_nv^n$, constituent à peu près tout ce qu'on connaît actuellement de rigoureux sur le problème du maximum de portée.

Le colonel Astier[1] a fait paraître une intéressante étude sur la question. Il a cherché à distinguer les cas où l'angle de portée maximum est plus grand ou moins grand que $\frac{\pi}{4}$; mais sa démonstration suppose implicitement que la résistance de l'air est très petite et que l'angle cherché est très voisin de $\frac{\pi}{4}$. Cela revient donc aux théorèmes démontrés ici.

[1] *Revue d'Artillerie*, tome IX, 1877, p. 313.

Dans une autre partie du travail, le colonel recherche les conditions nécessaires pour que l'angle de portée maximum α_m soit plus grand ou plus petit que l'angle de projection λ auquel correspond un angle de chute $\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right)$. Prenant la trajectoire en coordonnées obliques (94) sous la forme

$$y = f(z, \alpha),$$

il démontre les théorèmes suivants :

a) Selon que $\frac{df}{d\alpha_m}$ est positif, nul ou négatif, l'angle de portée maximum est supérieur, égal ou inférieur à λ.

b) Selon que l'exposant n sur toute l'étendue de la fonction $F(v)$ est supérieur, égal ou inférieur à l'unité, l'angle de portée maximum α_m est supérieur, égal ou inférieur à λ.

Ces deux théorèmes ne comportent pas la restriction relative à la résistance infiniment petite ; ils sont vrais dans tous les cas.

CONCLUSIONS

335. « Le perfectionnement des ressources théoriques « n'est pas, pour l'artilleur, un luxe infertile; mais c'est « le moyen le plus sûr et le plus simple de limiter le « cercle des coûteuses recherches empiriques et par là « d'épargner beaucoup de temps et d'argent. » Général Otto, 1845.

Mais n'a-t-on point, dans ce livre, eu tendance à substituer à ce luxe nécessaire, la prolixe et inféconde prodigalité d'une analyse purement théorique, dont la Balistique ne serait que le prétexte et qui planerait très haut au-dessus de toutes les applications pratiques, utiles à l'artilleur.

Il n'en est rien; nous nous sommes toujours tenu très près des applications pratiques et journalières. La Balistique et même l'Artillerie tout entière, dont l'histoire est liée directement à celle des principes de la Mécanique rationnelle, a toujours conservé avec la pure théorie un contact des plus intimes, qui en fait en quelque sorte une science privilégiée parmi les autres sciences appliquées. Un livre sur la Balistique Extérieure n'est qu'un chapitre entièrement développé d'un traité de Mécanique rationnelle.

D'ailleurs, un critérium certain de l'utilité et de l'intérêt des recherches théoriques dans une science appliquée quelconque est le nombre de tables numériques qui ont été calculées et qui sont en usage chez les praticiens pour les applications journalières. Or, à chacune des théories développées dans le présent livre, correspondent un très grand nombre de tables numériques[1], dont la liste totale occuperait plusieurs pages.

Dans ce livre, nous avons cherché à présenter un tableau complet et ordonné des solutions actuelles du « problème balistique principal » ; nous avons essayé de ne rien omettre de réellement intéressant, rigoureux et général, parmi les travaux des excellents géomètres et des savants officiers qui ont uni leurs efforts pour la solution du problème balistique. Nous avons pu réunir par la trame serrée d'une division logique, toutes les théories jusqu'ici éparses, indépendantes et d'apparence parfois contradictoires.

Une *première partie* de l'ouvrage contient l'étude détaillée des cas-limites facilement intégrables et celle, si importante, des propriétés générales des trajectoires ; nous avons poussé cette discussion plus loin qu'il n'avait été fait jusqu'ici et nous avons donné quelques théorèmes nouveaux sur la forme de l'hodographe, les variations de la vitesse sur la trajectoire, les propriétés de cette courbe, etc.

Dans la *deuxième partie*, une méthode générale qui consiste essentiellement dans la reconnaissance et la distinction des diverses séries balistiques, nous a permis

[1] On trouvera la plupart de ces tables numériques, soit dans la *Balistique expérimentale du lieutenant-colonel Vallier*, Paris, 1896, soit dans notre *Traité de Balistique Extérieure*, Paris, 1904.

de saisir la véritable nature des trajectoires de Didion et de Siacci, de leur donner leur extension naturelle et de compléter en les rectifiant les travaux du savant artilleur italien.

Plusieurs des séries balistiques, les plus différentes comme hypothèses initiales, admettent cependant des premiers termes presque identiques. Nous avons réussi à en faire la distinction et la classification générale.

Nous avons pu ensuite faire pénétrer dans tous les chapitres de la Balistique, l'idée fondamentale de la conservation de la fonction $F(v)$; la science acquiert ainsi le plus haut degré possible de généralité. Au point de vue des applications pratiques, les séries qui représentent la solution, admettront le même caractère de généralité et, il suffira de calculer d'avance, avec la fonction $F(v)$ qu'on aura choisie, les tables numériques des premiers, deuxième, troisième termes, etc., pour pouvoir en faire l'application aux problèmes de tir usuels.

En ajoutant que la Commission de Gâvre a adopté, pour le service journalier de ses expériences et l'établissement des tables de tir des canons de la marine, les méthodes exposées dans ce livre, nous n'aurons plus, croyons-nous, à justifier l'intérêt pratique de la très belle science théorique, qu'est la Balistique Extérieure Rationnelle.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES AUTEURS ET DES MATIÈRES

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

ASTIER (Colonel). Sur le mouvement des corps pesants dans les milieux résistants. *Revue d'artillerie*, t. IX, 1877.

BAILLS (Lieutenant de vaisseau). *Traité de Balistique Rationnelle*, in-8°, 1883, Paris, Delagrave.

BASSANI (Professeur). Voir : RONCA.

BASHFORTH (F.). *A mathematical treatise on the motion of projectiles*, in-12°, 1873, Londres, Asher.

BRACCIALINI (Commandant). Tables et formules pour les problèmes de tir courbe, *Revue d'artillerie*, t. XXIV, 1885.

BORDA (DE). *Mémoire sur la courbe décrite par les boulets et les bombes en ayant égard à la résistance de l'air*, in-12, Paris, 1843, Corréard.

CHAPEL (Commandant). **1**. Sur le calcul des éléments balistiques *Revue d'artillerie*, t. XVII et XVIII, 1881.

— **2**. Sur la balistique de M. Siacci, *Revue d'artillerie*, t. XXXIV, 1888.

— **3**. Sur une nouvelle étude de balistique extérieure de M. Siacci. *Revue d'artillerie*, t. XLVIII, 1896.

CHARBONNIER (Commandant). **1**. Traité de Balistique Extérieure théorique. (Ouvrage couronné par l'Académie des Sciences). *Mémorial de l'Artillerie de la Marine*, t. XXVII, 1899, et t. XXVIII, 1900.

— **2**. *Traité de Balistique Extérieure*. in-8°, Paris, 1904. Béranger.

— **3**. Sur les méthodes de la Balistique Extérieure. *Revue d'artillerie*, t. LXV, 1905.

CHARBONNIER. **4**. Historique de la Balistique Extérieure à la Commission de Gâvre. *Revue maritime*, 1906.

CRANZ (Professeur-Docteur). **1**. *Compendium der theoretischen Aüsseren Ballistik*, in-8°, Leipzig, 1896, Teubner.

— **2**. *Ballistik*. Encyclopœdie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen, in-8°. Leipzig, 1903, Teubner.

DIDION (Général). *Traité de Balistique*, in-12, Paris 1860, 2e édition, Dumaine.

GOSSOT (Général). Sur le calcul des trajectoires par arcs successifs. *Mémorial de l'Artillerie de la Marine*, t. XVIII, 1890.

GREENHILL (Professeur). Trajectoire d'un projectile dans le cas où la résistance de l'air est proportionnelle au cube de la vitesse, traduction GOSSOT, *Revue maritime et coloniale*, t. CV, 1890.

HENRY (Colonel). Cours de balistique extérieure. *Lithographie de l'Ecole d'application de Fontainebleau*, 1885.

HÉLIE et HUGONIOT. *Traité de Balistique expérimentale*, in-12°, Paris, 1884, Gauthier-Villars.

HERMARY (Commandant). Cours de Balistique Extérieure. *Lithographie de l'Ecole d'application de Fontainebleau*, 1884.

HUGONIOT. Voir : HÉLIE.

INGALLS (Capitaine). *Exterior Ballistics in the plan of fire*, in-12, New-York, 1886. Van Nostrand.

JACOB (Colonel). Une solution du problème balistique. *Mémorial de l'Artillerie de la Marine*, t. XXVII, 1899.

LEGENDRE. *Dissertation sur la question de balistique*. in-12°, Paris, 1846, Corréard.

LLAVE (Colonel de la). *Balistica abreviada*, in-12°, Madrid, 1894. Imprenta del cuerpo di artilleria.

MAYEWSKI (Général). *Traité de Balistique Extérieure*, in-8°, Paris, 1872, Gauthier-Villars.

OLLÉRO (Colonel). *Balistica*, in-8°, Madrid, 1890. Imprenta del cuerpo di artilleria.

OTTO (Général). **1**. *Tables balistiques générales pour le tir élevé*, traduction Rieffel, in-12°, Paris, 1844, Corréard.

— **2**. *Théorie mathématique du tir à ricochet*, traduction Rieffel, in-12°, Paris, 1845, Corréard.

PITON-BRESSANT (Capitaine). *Mélanges*, in-12°, Paris, 1892. Imprimerie Nationale.

RONCA (Capitaine de frégate). **1**. et BASSANI (Professeur A.). *Balistica Esterna*, in-8°, 1901, Livorno. Giusti.

— **2**. *Manuale di Balistica Esterna*, in-8°, 1901, Livorno, Giusti.

SPARRE (Comte M. de). **1**. Sur le tir courbe (4e puissance de la vitesse). *Mémorial de l'Artillerie de la Marine*, t. XX, 1892.

— **2**. Sur le tir courbe (carré de la vitesse). *Mémorial de l'Artillerie de la Marine*, t. XXI, 1893.

— **3**. Notice sur le tir courbe. *Mémorial de l'Artillerie de la Marine*, t. XXII, 1894, t. XXIII, 1896, t. XXIV, 1896.

— **4**. Etude du mouvement du projectile dans le cas où la la résistance de l'air est supposée proportionnelle au cube de la vitesse. *Mémorial de l'Artillerie de la Marine*, t. XXVII, 1899.

— **5**. Etude du mouvement du projectile dans le cas où la résistance de l'air est supposée proportionnelle à la 4e puissance de la vitesse. *Mémorial de l'Artillerie de la Marine*, t. XXVII, 1899.

SAINT-ROBERT (Colonel de). *Mémoires scientifiques*, t. I. *Balistique*, in-8°, 1872, Turin, Vincent Bona.

SIACCI (Colonel). *Balistique extérieure*. Traduction Laurent, in-8°, Paris, 1892. Berger-Levrault.

VALLIER (Lieutenant-colonel). **1**. Essais sur les principes de la Balistique extérieure. *Revue d'artillerie*, t. XXIX, 1886.

— **2**. De la solution des problèmes de tir courbe et de l'angle de plus grande portée. Etude sur l'ouvrage du capitaine Zabouski. *Revue d'artillerie*, t. XXXIV, 1889.

— **3**. Sur les méthodes actuelles de la balistique. *Revue d'artillerie*, t. XXXVI, 1890.

VALLIER. **4**. Note supplémentaire sur les méthodes de la balistique. *Revue d'artillerie*, t. XXXVII, 1891.

— **5**. Méthode et formules de Balistique Extérieure. *Revue d'artillerie*, t. XLI, 1892, t. XLII, 1893, t. XLIII, 1894.

— **6**. *Balistique expérimentale*, in-12°, Paris, Berger-Levrault, 1894.

— **7**. *Balistique Extérieure*, petit in-8°, Paris, S.-D. Encyclopédie Léauté.

ZABOUSKI (Capitaine). **1**. Voir : VALLIER.

— **2**. Supplément à la solution des problèmes de tir courbe. *Revue d'artillerie*, t. XXXIII, 1891.

TABLE SYSTÉMATIQUE DES MATIÈRES

BALISTIQUE EXTÉRIEURE RATIONNELLE

(PROBLÈME BALISTIQUE PRINCIPAL)

LIVRE PREMIER

LES CAS LIMITES DU PROBLÈME BALISTIQUE

LIVRE II

LES PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES TRAJECTOIRES ATMOSPHÉRIQUES

LIVRE III

RÉSISTANCE MONOME

LIVRE IV

LE TIR DE PLEIN FOUET

LIVRE V

LES TROIS SÉRIES BALISTIQUES

ÉVREUX, IMPRIMERIE CH. HÉRISSEY ET FILS

